П. М. ЭРДНИЕВ
Б. П. ЭРДНИЕВ

# ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЕ

П.М. Э
Б.П. Э

# ТЕО
# ОБУ
# ВН

-6090-

Издательство
«Педагогика»
1988

П. М. ЭРДНИЕВ
Б. П. ЭРДНИЕВ

# ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЕ

-6090-

БИБЛИОТЕКА
Инв. №
РАЙПЕДКАБИНЕТА

Издательство
«Педагогика»
1988

ББК 74.262
Э 75

Рецензенты:
кандидат педагогических наук *Г. В. Воробьев*,
кандидат педагогических наук *А. Г. Глущенко*

**Эрдниев П. М., Эрдниев Б. П.**
Э 75 Теория и методика обучения математике в начальной школе. (Педагогическая наука — реформе школы).— М.: Педагогика, 1988.—208 с.—
В пер.: 1 р. 20 к.

В свете реализации задач, поставленных реформой школы, авторы предлагают обновленный интегрированный курс начальной математики, который позволит снизить перегрузку учащихся. Авторы монографии подробно знакомят с разработанной ими методикой начального обучения, дают ее теоретическое обоснование.
Для специалистов в области педагогики и методики начального обучения.

Э $\frac{4306000000-042}{005(01)-88}$ 55—88 **ББК 74.262**
ISBN 5—7155—0121—0

© Издательство «Педагогика», 1988

## Оглавление


От авторов 3

Глава I. ТЕОРИЯ УКРУПНЕНИЯ ЗНАНИЙ КАК ОБЪЕКТИВНАЯ ТЕНДЕНЦИЯ СОВРЕМЕННОЙ ДИДАКТИКИ 5

§ 1. Что такое укрупнение дидактической единицы (УДЕ)? —

§ 2. Взаимосвязь теории и техники обучения в укрупнении дидактической единицы 19

§ 3. О целостности и диалектичности математических знаний 30

§ 4. О принципе историзма в обучении математике 45

§ 5. О взаимосвязи сознания и подсознания в актуализации укрупненных знаний 55

§ 6. Вклад УДЕ в саморазвитие мышления учащихся 73

§ 7. Обратимость операций как основа сознательности усвоения знаний 83

§ 8. Матричное и граф-схемное представление математической информации 101

§ 9. Диалог об укрупнении дидактической единицы 115

§ 10. Выводы 125

Глава II. МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЕ НА ОСНОВЕ УКРУПНЕНИЯ ДИДАКТИЧЕСКИХ ЕДИНИЦ 129

§ 11. Об объеме знаний учащихся по математике за первые два года обучения —

§ 12. Сравнение (противопоставление) понятий на уроках математики 131

§ 13. Изучение числового ряда 134

§ 14. Совместное изучение сложения чисел и разложения числа на слагаемые 138

§ 15. Переместительный закон сложения. Совместное изучение сложения и вычитания 142

§ 16. Решение примеров, в которых надо определить знак действия и неизвестный компонент 147

§ 17. Действия с нулем 149

§ 18. Изучение темы «Второй десяток» 151

§ 19. Сложение и вычитание в пределах 20 без перехода через десяток 154

§ 20. Сложение и вычитание в пределах 20 с переходом через десяток 159

§ 21. Работа с таблицей Пифагора 165

§ 22. Об изучении порядковых чисел в начальной школе 168

§ 23. Классификация простых задач (в одно действие) на сложение и вычитание 169

§ 24. Задачи на нахождение разности, уменьшаемого и вычитаемого. Одновременное изучение задач на нахождение разности и уменьшаемого 173

§ 25. Противопоставление задач на нахождение суммы и разности 175

§ 26. О системе простых задач, рассматриваемых при изучении табличного умножения и деления 176

§ 27. Изучение задач на уменьшение и увеличение числа в несколько раз и на кратное сравнение величин 181

§ 28. Противопоставление задач на разностное и кратное сравнение 185

§ 29. Изучение задач на нахождение части числа, числа по величине его части; решение задач типа: «Какую часть составляет одно число от другого?» 186

ВМЕСТО ЗАКЛЮЧЕНИЯ. О ПУТЯХ СОВЕРШЕНСТВОВАНИЯ ПРОГРАММ И УЧЕБНИКОВ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЫ 190

## От авторов

Настоящая монография посвящена изложению результатов более чем тридцатилетнего экспериментально-теоретического исследования проблемы усовершенствования обучения математике в начальной школе посредством укрупнения дидактических единиц, получившего признание и распространение среди многих учителей.

Основные технологические приемы укрупнения дидактических единиц выдержали испытание не только в опытных классах г. Ставрополя и г. Элисты, но и в школах других областей.

В книге описаны также пути повышения сознательности усвоения знаний посредством разумного сочетания логической (словесной) и образной (рисуночной) подачи одного и того же содержания. Однако особое внимание уделено методологии укрупнения знаний, т. е. теоретической аргументации значимости обсуждаемой методической системы как нового дидактического направления.

Достоинства укрупненной структуры знаний в определенной мере объясняются современными общенаучными взглядами (системный подход), а также психофизиологическими представлениями о резервах эффективного обучения (асимметричность мозга, матрицирование знаний, взаимосвязь сознательного и подсознательного механизмов в усвоении учебной информации).

Мы стремились показать, как передовая технология обучения обеспечивает такое важнейшее качество математических знаний, как стимулирование развития зачатков диалектического мышления у учащихся.

В книге описаны пути экономного и эффективного обучения основным разделам программы начальной школы.

Авторы пользуются случаем выразить глубокую благодарность учителям и методистам, труд и советы которых помогли созданию данной книги: И. Л. Улицкой (Одесса), Р. И. Магогиной (Краснодарский край); А. Н. Алешиной (Козельск), А. П. Ратнер (г. Горький), Л. К. Горбаневой, В. В. Доржиновой, А. Г. Даржиновой, Л. Д. Мамутовой и др. (г. Элиста).

Материал книги может быть использован учителями, работающими по стабильным учебникам, как источник дополнительных упражнений. Приемы и методы обучения, многократно испытанные в условиях массовой школы, помогут, как мы надеемся, учителям существенно улучшить постановку математического образования

на наиболее ответственном его этапе — в первые четыре года обучения.

В материалах февральского (1988 г.) Пленума ЦК КПСС сказано: «...нужно свободное соревнование умов. От этого только выиграет наша общественная мысль, умножится ее прогностическая сила». Тем самым Пленум рекомендовал покончить с попытками отдельных групп утвердиться в качестве неподверженных критике оракулов и монополистов от науки. Весь наш жизненный путь и нелегкая борьба, нашедшие отражение в представляемой на суд читателя книге, заставляют нас солидаризироваться с указанным положением Пленума и приветствовать соответствующие его рекомендации.

Все замечания по содержанию книги просим присылать в адрес издательства «Педагогика».

Доктор педагогических наук
*П. Эрдниев,*
кандидат педагогических наук
*Б. Эрдниев*

Глава I

# ТЕОРИЯ УКРУПНЕНИЯ ЗНАНИЙ КАК ОБЪЕКТИВНАЯ ТЕНДЕНЦИЯ СОВРЕМЕННОЙ ДИДАКТИКИ

## § 1. ЧТО ТАКОЕ УКРУПНЕНИЕ ДИДАКТИЧЕСКОЙ ЕДИНИЦЫ (УДЕ)?

Может случиться, что разговорный язык подскажет науке удачный термин, который выразит суть нового понятия и приживется в науке.

*Б. Кедров*

Очень кратко изложим историю того, как новая методическая система получила путевку в жизнь.

Президиум Академии педагогических наук СССР по предложению Министерства просвещения РСФСР провел решающий эксперимент по проверке эффективности методической системы укрупнения дидактических единиц (УДЕ). В этих целях составленные нами программы и опытные учебники по математике для начальных классов испытывались в течение трех лет (1977—1980) в экспериментальной школе № 82 АПН СССР (пос. Черноголовка Ногинского района Московской области). Исследованием был охвачен 21 контрольный и экспериментальный класс (всего в этих классах было 745 учащихся).

Сравнение показателей успешности усвоения знаний проводилось по текстам, подготовленным как руководителем исследования, так и Научно-исследовательским институтом содержания и методов обучения АПН СССР, а также Программно-методическим управлением Министерства просвещения РСФСР.

В решении президиума АПН СССР от 28 VIII 1980 г. по итогам трехлетнего испытания наших программ и учебников была одобрена технология укрупнения знаний, а созданная методическая система была рекомендована к внедрению в школьную учебную практику.

В постановлении президиума АПН СССР по итогам этого исследования было записано: «Подтверждена целесообразность применения в школе основных приемов укрупнения дидактических единиц (совместное изучение взаимосвязанных вопросов, составление обратных задач, деформированные упражнения)».

Укрупненной дидактической единицей мы называем систему родственных единиц учебного материала, в которой симметрия, противопоставления, упорядоченные изменения компонентов учебной информации в совокупности благоприятствуют возникновению единой логико-пространственной структуры знания. Это определение в известной мере примыкает к определению понятия функциональной системы, данному известным физиологом, академиком П. К. Анохиным. По П. К. Анохину, система — совокупность не только *взаимодействующих,* но и *взаимоСОдействующих*

компонентов, ориентированных на получение фокусированного полезного результата.

Знание, которым учащиеся овладевают посредством методической системы УДЕ, обладает качеством системности. Приведем примеры.

Уже при освоении первого десятка задачи на увеличение на несколько единиц и на уменьшение на несколько единиц целесообразно рассматривать как двуединые задачи:

Мише 6 лет, а Нина старше его на 2 года. Сколько лет Нине?

$(6+2=8)$

Нине 8 лет, а Миша моложе ее на 2 года. Сколько лет Мише?

$(8-2=6)$

Или еще. Крайне невыгодно целых полгода во II классе выполнять действия только в пределах сотни: одно дело, если умножение $7 \cdot 3=21$ освоено во II классе, а $70 \cdot 3=210$ — в III классе, как это делается сейчас в школе. Иное получается, когда учитель идет по линии немедленного создания ассоциаций по сходству, осуществляя пропедевтику концентра тысячи и решая уже во II классе пары примеров вида:

$$7 \cdot 3=21,$$
$$70 \cdot 3=210.$$
$$23 \cdot 2+40=86,$$
$$230 \cdot 2+400=860.$$

Наиболее ценное в приведенных выше парах заданий — это извлечение «невидимого» третьего компонента знания: отображение познанием учащегося способов перехода мысли от единиц к десяткам, от сотни к тысяче.

Подобная линия не одинарных, а бинарных спаренных упражнений имеет исключительно большое значение в постижении детьми природы десятичной системы счисления. «...Обычное представление схватывает различие и противоречие, но не **переход** от одного к другому, а *это — самое важное*»[1].

Данная книга посвящена теоретическим истокам и практической реализации такого построения учебного предмета, учебника, урока и набора упражнений, которое обеспечивает быстрое и основательное усвоение программных знаний.

Согласно данным специалистов АПН СССР, при последовательном применении методической системы УДЕ усвоение программных знаний достигается с экономией учебного времени, доходящей до 14% против годовых норм.

Однако эффективное обучение, понимаемое как экономное по расходу времени, должно обеспечивать при этом одновременное достижение качественного скачка в развитии мышления; иначе говоря, применяемая технология обучения должна созда-

[1] *Ленин В. И.* Полн. собр. соч. Т. 29. С. 128.

вать условия для развития начал диалектического мышления. «Работы, связанные с укрупнением дидактических единиц, могут оказаться полезными для перехода с детального «микроуровневого» описания... на уровень более высокого обобщения, приближающего к структурному изложению содержания дисциплины»[1].

Сущность укрупнения дидактических единиц сводится, таким образом, к объединению знаний во времени (урок, лекция) или в пространстве (разворот учебника и тетради). Элементы знания, разведенные ранее по традиции по разным разделам и годам обучения, объединяются и образуют тем самым целостный сплав структурно новых знаний[2].

Укрупнение дидактических единиц — это специфическое отображение в дидактике объективной тенденции всей современной науки к интеграции знаний, ведущей к углублению обобщения в познавательных процессах и способствующей освоению людьми возрастающего объема информации за меньшее, чем прежде, время.

Укрупненная дидактическая единица представляет «клеточку» учебного процесса, состоящую из логически различных элементов, обладающих информационной и структурной общностью, благодаря чему знания приобретают свойства устойчивости к сохранению в памяти и действенности (быстрого проявления) в многообразной учебной деятельности. Требованиям УДЕ удовлетворяют в математике взаимно-обратные действия (операции, функции, теоремы, задачи) и вообще группы родственных понятий и суждений, образующие качественно определенную реальную целостность, единую систему знаний. Обладая информационной общностью, такие знания удобны для *совместного и одновременного изучения* на одних и тех же уроках (соответственно, изложения в пределах одной страницы учебника).

Так, скажем совмещенное изучение в I классе простейших случаев умножения и деления ($2 \cdot 4 = 8$; $4 \cdot 2 = 8$; $8:2 = 4$; $8:4 = 2$) имеет следствием возникновение целостной единицы знания, элементы которой связаны не только логическими связями (умножение превращается в деление: $2 \cdot 4 = 8$; $8:2 = 4$), но и наличием симметрии в расположении символов, упорядоченной взаимосвязью данных и искомых в следующих табличных записях:

| | |
|---|---|
| (I) $2 \cdot 4 = 8$, | (III) $8:2 = 4$, |
| (II) $4 \cdot 2 = 8$, | (VI) $8:4 = 2$. |

По современным психофизиологическим представлениям, при переходе от первого примера $2 \cdot 4 = 8$ к четвертому $8:4 = 2$ какие-то

[1] Современная высшая школа (журнал социалистических стран). 1982. № 2. (Ред. статья).

[2] Понятие «укрупнение единиц усвоения» отмечено в числе новых направлений педагогики в БСЭ (т. 19, с. 299).

специализированные нейронные ансамбли, по-видимому, улавливают на подсознательном уровне специфические детали в переработке информации:

(I) $2 \cdot 4 = 8$ (читаем слева направо).

(II) $2 = 4:8$ (читаем справо налево! Необычная запись!!).

(III) $8:4 = 2$ (общепринятая запись, читаем слева направо).

Переход от (I) ко (II) словесно выражается так: если произведение (8) разделить на множитель (4), то получится множимое (2).

Короче говоря, обучение посредством УДЕ в психофизиологическом плане означает подключение резервных (подсознательных) механизмов переработки информации (мысленное манипулирование символами, изменение их порядка и т. п.).

Программы и экспериментальные учебные пособия по математике, построенные нами на основе идеи УДЕ, выдержали успешное испытание в экспериментальных школах. Можно утверждать, что благодаря УДЕ уровень знаний учащихся в среднем как бы возрастает на 1 балл.

Многолетними исследованиями в условиях массовой школы удалось доказать эффективность соответствующих технологических приемов обучения: не только обращения задачи, деформации и составления задач и упражнений, но и одновременного сообщения одной и той же информации на нескольких кодах (речевом, образном, символическом), использования матричных и графсхемных представлений информации.

В исследованиях других авторов установлена бóльшая сила общности УДЕ, широкая приложимость соответствующей методологии и технологии к разным областям обучения.

В методических работах описаны возможности «укрупненного изучения» ряда вопросов химии, русского языка, черчения, а также и высшей математики; выявлены неиспользованные возможности применения УДЕ в практике обучения в ПТУ, техникумах, вузах[1].

Первые наши работы, ставшие подступами к методической системе УДЕ, были опубликованы тридцать лет назад[2]. При составлении программ по математике для начальной школы нам удалось еще тогда включить в них следующие положения, благоприятствующие укрупненному изучению материала: «Сквозной линией проходит через программу идея раскрытия взаимосвязи

[1] *Гузик Н. П.* Учить учиться. М., 1981; *Лыков В. Я.* Пути и средства эстетического воспитания при изучении физики//Среднее специальное образование. 1984. № 8; *Лысенкова С. Н.* Оптимизация процесса конструирования учебной информации преподавателем вуза: Автореф. канд. дис. Л., 1984; *Ефремов А. В.* Повышение эффективности педагогического руководства творческой познавательной деятельностью учащихся: Автореф. канд. дис. М., 1979.

[2] См.: *Эрдниев П. М.* Проверка решения как необходимый элемент обучения арифметике//Начальная школа. 1953. № 10.

между прямыми и обратными действиями...»; «Важнейшее значение придается постоянному использованию... противопоставления»; «Наряду с решением готовых задач полезно систематически упражнять детей в самостоятельном составлении задач по различным заданиям учителя».

Первоначальные наблюдения о выгодах пространственно-временного сближения взаимно-обратных операций, по-видимому, накапливались исподволь на уровне эмпирических наблюдений в период работы автора учителем начальной школы. (Теоретическое обоснование системы УДЕ стало фактом в работах П. М. Эрдниева 60-х гг.— *Примеч. ред.)*

В подкрепление этих тезисов укажем, что в базисных программах по математике для средней школы, составленных специалистами АН СССР и АПН СССР в 1981 г., мы находим следующий тезис: «Материал для изучения в каждой группе классов распределен по содержательным линиям, объединяющим близко связанные между собой темы курса».

В базисных программах для средней школы сформулированы такие интегрированные темы, как «Пропорция и проценты», «Координаты и векторы», «Уравнения и неравенства», которых не было в предшествовавших функциональных программах; эти позиции, несомненно, открывают новые возможности для переноса идеи УДЕ в плане преемственности из практики начальной школы в старшие классы.

Не преминем здесь подчеркнуть, что главный этап в освоении прогрессивных дидактических новаций — отражение их не столько в программе, сколько в учебниках (хотя без первого затруднительно второе). Решающей фазой внедрения прогрессивной методики в практику математического образования является реализация этой методики в микродидактике урока, в соответствующем параграфе и конкретном упражнении учебника. Однако уже на подступах к эффективной структуре учебника, а именно при обсуждении вариантов программ, важно разрешить естественные противоречия в теоретических представлениях методистов о технологических резервах обучения математике.

Характерным недостатком структуры действующих в массовой школе учебников и задачников математики мы считаем изолированность упражнений друг от друга, когда каждое из них снабжено отдельным номером и информационная общность между ними почти отсутствует (задачи различаются и по фабуле, и по набору чисел, и по математическим величинам). Порядок их решения почти произволен и определяется учителем. Методы обучения реализуются через выполнение упражнений, причем важно не одно только количественное разнообразие методов и упражнений само по себе: лишь набор определенных упражнений, сконструированных на основе принципа укрупнения, в четкой их последовательности обеспечивает прочность и сознательность усвоения знаний.

В постановке упражнения — основной «клеточки» обучения — существенным недостатком продолжают оставаться калейдоскопичность подбора упражнений, отсутствие тесных информационных связей между ними, из-за чего группа упражнений не образует внутренней целостности. Чтобы показать это, привлечем конкретные суждения методистов.

Авторы учебников математики для начальной школы А. М. Пышкало и М. И. Моро в одной из статей в журнале «Начальная школа» (1977, № 2) описывают структуру типичного, по их мнению, урока математики следующим образом: «Рассмотрим для примера урок, материал которого представлен на с. 34 учебника для II класса (1977) (упражнения 175—182). Новый материал на уроке — название компонентов и результатов умножения; старый материал — закрепление умения решать уравнения, выполнять преобразования с мерами, решать текстовые задачи и др.».

Приведем перечень указанных упражнений, выполненных на этом уроке, согласно рекомендациям этих авторов:

176. Первый множитель 2, второй 4. Найти произведение. Что показывает первый множитель? второй множитель?

177. Запиши и вычисли: произведение чисел 5 и 2, 7 и 3, 2 и 6.

178. Карандаш стоит 4 коп. Сколько копеек надо уплатить за 2 таких карандаша? за 4 карандаша? за 5 карандашей?

*Решение.* $4 \cdot 2 = 8$ (коп.); $4 \cdot 4 = 16$ (коп.); $4 \cdot 5 = 20$ (коп.). (В учебнике решений нет.)

179а. Учительница раздала ученикам 12 тетрадей, по 2 тетради каждому. Сколько учеников получили тетради?

*Решение.* $12:2 = 6$ (учеников).

180. В кружке пения занимались 42 ученика, в кружке рисования на 5 учеников меньше, чем в кружке пения, а в спортивном кружке занималось столько учеников, сколько в кружке пения и рисования вместе.

Сколько учеников занималось в спортивном кружке?

*Решение.* $(42 - 5) + 42 = 79$.

181.

| | | |
|---|---|---|
| $49 + 18 - 49$ | $x + 17 = 40$ | 7 м 4 дм = □ дм |
| $56 - 47 + 18$ | $a - 16 = 40$ | 5 дм 7 см = □ см |
| $96 - 26 - 64$ | $31 - c = 9$ | 49 см = □ дм □ см |

Указанные авторами упражнения стабильного учебника, которые должны быть костяком целого урока, таковы, что нет между ними четких преемственных связей ни по набору чисел, ни по фабуле. Так и кажется, что возможные переходы, способные перекинуть живую мысль от предыдущего упражнения к последующему, намеренно разорваны: так, если в № 178 задача на умножение про стоимость карандашей ($4 \cdot 5 = 20$), то в № 179 обязательно «все иначе» — задача на деление про раздачу тетрадей ($12:2 = 6$) и т. д.

Упражнения 175—181 для сознания учащихся — отдельности, замкнувшиеся логически сами в себе. Общность между ними можно усмотреть разве лишь в общем плане, поскольку в них встречаются одни и те же действия или вычисления проводятся

в пределах 100. Связи эти, однако, эфемерные, непрочные, абстрактно мыслимые.

Лейтмотивом урока, построенного по системе укрупнения дидактических единиц, служит правило: не повторение (да еще отсроченное, т. е. отложенное на следующие уроки), а преобразование выполненного задания, осуществляемое немедленно на том же уроке, через несколько секунд или минут после исходного, для познания объекта в его развитии и противопоставления исходной формы задания и видоизмененной.

В учебнике в материале данного урока вводятся названия компонентов только для умножения. А почему бы не повторить здесь же и компоненты деления?

Опишем кратко (в форме комментирования каждого из приведенных выше упражнений из стабильного учебника) конкретную реализацию метода укрупнения дидактических единиц.

177. В учебнике дан набор примеров в основном на одно и то же действие — умножение. Мы же предлагаем примеры большей частью не только на оба действия (умножение и деление), но и на сочетание обычных форм с деформированными (с пропущенными элементами).

$$5 \cdot 2 = \square, \qquad 6 : \square = 2,$$
$$\square \cdot 3 = 21, \qquad \square \cdot \square = 10.$$

Хотя здесь набор числовых комбинаций все тот же, но какое обилие форм открывается этим несложным приемом!

178, 179. Предложенные задачи одинарные, завершенные, без развития и продолжения. В системе же укрупнения знаний на первых порах обязательно решение цикла взаимно-обратных задач, например:

179а. Учительница раздала тетради 6 ученикам по 2 тетради каждому. Сколько всего тетрадей раздала учительница? *Решение.* $2 \cdot 6 = 12$.

179в. Учительница раздала 12 тетрадей поровну 6 ученикам. По сколько тетрадей досталось каждому? *Решение.* $12 : 6 = 2$ (т).

Итак, не погоня за множеством числовых комбинаций ($4 \cdot 2 = 8$, $4 \cdot 4 = 16$, $4 \cdot 5 = 20$), а обнаружение всех связей только между тремя числами, освоение тройки взаимно-обратных задач вида 179а, 179б, 179в.

Вернемся, однако, к структуре упражнений комбинированного урока в конструкции А. М. Пышкало и М. И. Моро.

180. Авторы не только не переходят к задачам на деление (на обратное действие) в связи с выполнением предыдущих упражнений на умножение, но в № 180 решают вообще отвлечь мысли детей от нового материала (умножения) и уводят их в сферу «повторения ранее изученного», а именно — предлагают решить составную задачу только на сложение и вычитание: $(42 - 5) + 42 = 79$.

По методике укрупнения упражнений мы опять же не ограничиваемся решением готовой задачи, как это имеет место у А. М. Пышкало и М. И. Моро, а стараемся тут же вслед за решенной задачей (хотя устно!) предложить самостоятельную конструктивную работу на составление обратной или аналогичной задачи школьником.

Схема прямой (решенной) задачи была такова: 42, 5, 79.

В нашей же системе, как правило, составляется цикл взаимно-обратных задач следующим образом.

180а. Предлагается составить и решить обратную задачу по схеме: 42, □, 79.

«В кружке пения — 42 человека, а в спортивном — 79.

Известно, что в спортивном кружке занималось столько человек, сколько в кружках пения и рисования вместе.

Сколько человек занималось в кружке рисования?

В каком кружке занималось больше людей: рисования или пения? На сколько больше?»

*Решение* (обратной задачи).

1) $79-42=37$;

2) $42-37=5$ (чел.).

Отметим наличие двух выгод в системе укрупнения:

1) пользуясь краткой схемой прямой задачи 42, 5, □, ученику трудно механически написать и схему будущей, еще не рассказанной обратной задачи:

42, □, 79

2) отталкиваясь от схемы обратной задачи, ученик успешно справляется с ее словесной формулировкой.

Решение прямой задачи можно представить как переход «условие задачи → ответ (текст → выражение)». Но на односторонних упражнениях этого вида не достичь основных целей обучения!

Даже второклассники, обучавшиеся по нашим учебникам, успешно справляются с логическим обращением, т. е. дополнительным заданием вида «выражение → текст условия».

Так, ученику предлагается (конечно, устно) рассказать условия задач по числовым выражениям:

$$(30-10)+30$$
$$(30-10+30$$
$$(30+10)+30$$
$$(30+10)+30 \text{ и т. д.}$$

Вот условие к последнему выражению:

«Во II классе 30 учеников. В I на 10 учеников больше, чем во II. Сколько учеников в I и II классах вместе?»

181. В наших экспериментальных учебниках для II класса вычисления с самого начала учебного года развертываются не в пределах 100, а сразу в пределах 1000. Поэтому для наших пособий обычны колонки примеров вида:

$49+18-19$

$490+180-190$

49 коп. + 18 коп. — 19 коп.

4 ц 90 кг + 1 ц 80 кг + 1 ц 90 кг

(Заметим, что мы нередко пользуемся одним и тем же набором чисел, цифр, выпячивая вариацию именованных чисел.)

У авторов комбинированного урока четко проявляется *линия «всего понемногу»*, причем они начисто забывают так называемый новый материал, на который у них отводится часто слишком уж мизерная доля урока.

Зачем же надо «повторять» уравнения на действия первой ступени ($x+17=40$, $a-16=40$), как это предусмотрено у авторов, когда так важно построить именно на этом же уроке логические подпорки новому материалу — действиям второй ступени, решая, скажем, уравнения именно на эти действия: $x\cdot 2=10$, $12:y=2$ и т. д.

Увы, стратегия традиционного урока такова, что авторы учебника, проводя логику раздельного изучения, не могут углубиться в умножение и одновременно в его инобытие — деление, не могут «взять с собой» на этот урок уравнения на изучаемые действия, ибо по раскладке часов положено деление изучать в особой теме,

а решение даже самого простейшего из уравнений $x \cdot 2 = 10$ требует... деления! Система УДЕ успешно разрешает этот парадокс обучения.

Мы видим, как раздельное изучение по рукам и ногам связывает и авторов учебников, и тем более учителей, закрывая путь к тренировке учащихся в изменении упражнения, в наращивании и укрупнении знаний вокруг исходного.

А вот как авторы завершают описание приведенного урока:

«Последнее упражнение, предлагаемое в учебнике для этого урока (№ 182): «Начерти такой четырехугольник (как изображенный на странице учебника) и проведи в нем один отрезок так, чтобы образовался: а) прямоугольник и треугольник; б) квадрат и другой четырехугольник».

Урок этот — образчик комбинированного урока, самого распространенного в практике обучения математике не только в начальной, но и в средней школе. При такой системе новый материал фактически исчезает среди потока разнородных понятий, непосредственно не связанных с ним; новый материал при этом не становится логическим центром, вокруг которого следовало бы развертывать весь урок.

Если, например, новый материал — действие умножения, как в нашем случае, так к чему обязательно притягивать к этому уроку искусственно отрезки, треугольники, вычитание и многое другое, не примыкающее к ядру урока не только последовательно, логически, но даже ассоциативно?

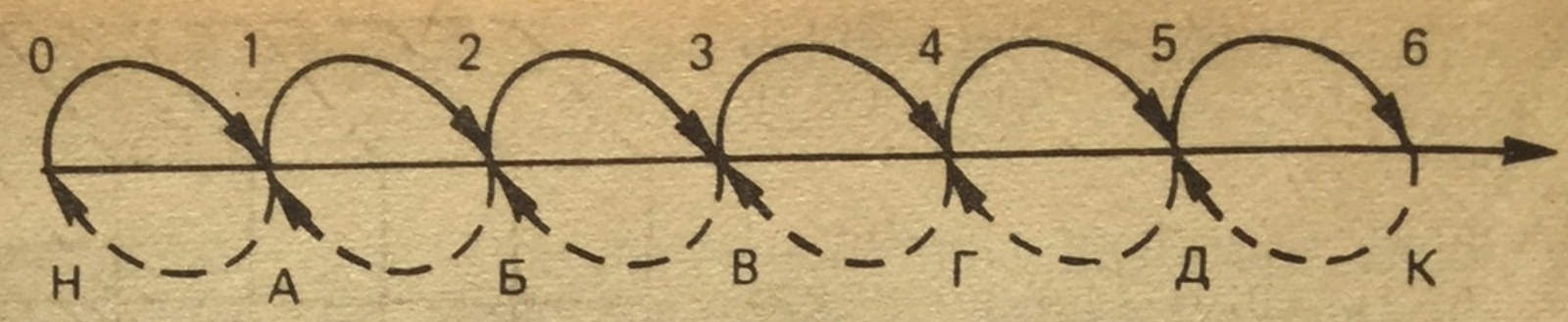
При методике укрупнения упражнений достигаемое многообразие понятий иного рода: они представляют собой ближайшее окружение основного понятия, его смысловое окружение, его топологию.

В данной связи если уж «проходить геометрический материал», то это следовало бы делать не между прочим, выделяя ему по нескольку минут в конце урока, а основательно, посвящая целый урок всей доступной генеалогии тех или иных геометрических понятий, со специфическим арсеналом упражнений, обозначений, измерений и построений. Только в этом случае достижимо прочное и основательное знание. Изучать не все понемногу, а многое об одном, о главном, постигая многообразие в едином, в целом! Не скольжение по поверхности, по верхушкам знаний, а углубление, выращивание куста ассоциаций, древа знаний!

Мы намеренно остановились на подробном анализе урока начальной школы, ибо он представляет модель комбинированных школьных уроков математики вообще.

Но любому уроку математики, описанному в поурочных разработках (дидактических материалах) для средней школы, можно указать пути укрупненного изложения, аналогично сделанному нами выше.

Распределенное, отсроченное изучение материала (гомеопа-




Н – начало числового луча
К – конец числового луча

**Рис. 1**

тическими дозами) с выделением на изучение нового по нескольку минут на ряде уроков считается нормой во многих методических сочинениях. Вот что пишут об этом А. М. Пышкало и М. И. Моро: «Рассмотрим в качестве примера ознакомление младших школьников с площадью и ее измерением. Материал этой темы в современной программе распределен в курсе III класса по отдельным подтемам, которые изучаются не сразу одна вслед за другой, а с некоторыми промежутками, в течение которых, работая над другими вопросами программы, учащиеся продолжают выполнять различные упражнения, требующие применения знаний о площади и ее измерении».

Можно полагать, что в начальной школе в силу малого комплекса изученного материала бессистемность заданий в ряде случаев преодолевается непроизвольно: некоторое слияние знаний может здесь произойти в сознании как бы само по себе, ибо немного еще базисных понятий, ядер конденсации знаний. Калейдоскопичность, изолированность упражнений характерны еще в большей мере для старших классов, и тем ощутимее здесь отрицательные последствия этой инерции.

Методическая система УДЕ обладает преимуществами целостной системы. Характерные ее особенности проявляются при

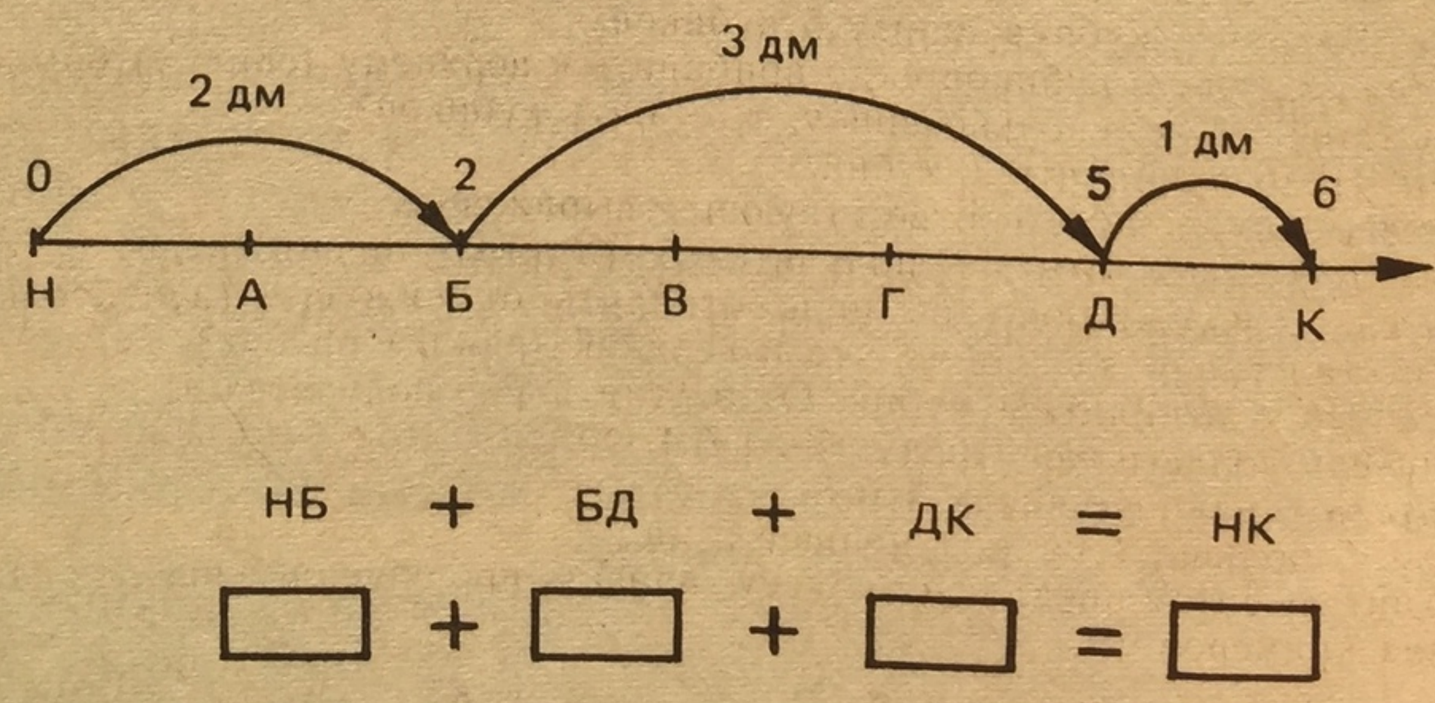



**Рис. 2**

построении в этом ключе урока, системы уроков по разделу и всего учебника.

Рассмотрим один из уроков в I классе, построенных на позициях УДЕ.

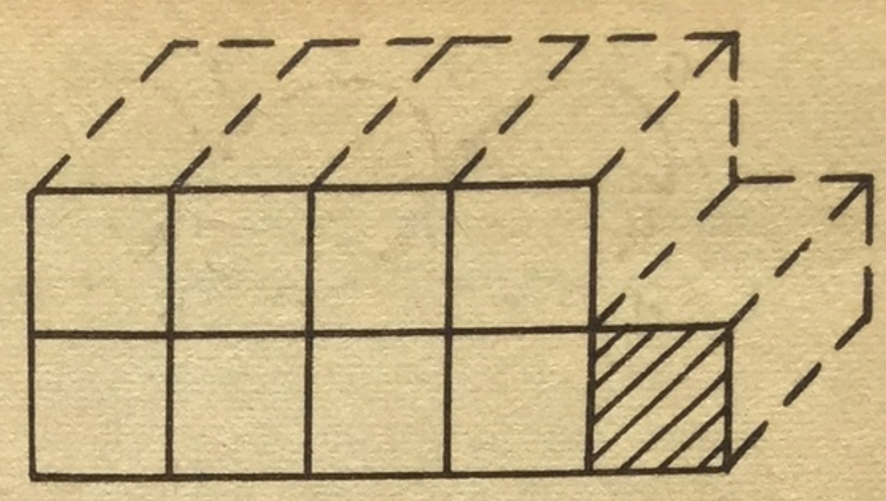


Рис. 3

*Тема урока.* Решение примеров и задач в пределах числа 6.

*Цель урока.* Повторить решение задач на нахождение суммы и слагаемого.

*Ход урока.* 1. В начале урока проводится устное повторение пройденного.

Прямой счет: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Обратный счет: 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0.

Эти числа откладываются на числовом луче. (На доске укреплена метровая линейка с дециметровыми делениями. Против соответствующих делений накалываются цифры из разборной кассы; рис. 1.)

2. Учительница напоминает учащимся следующие противопоставления. При прямом счете числа последовательно увеличиваются (слева направо по числовой оси); при обратном счете они *уменьшаются; большее* число расположено на луче *правее* меньшего числа, а *меньшее* число расположено на луче *левее* большего числа.

Дети комментируют: «Длина отрезка НА равна 1 дм» (Н — начало числовой оси). Учитель показывает и записывает на доске: НА = 1 дм.

Длина отрезка НБ равна 2 дм: НБ = 2 дм, и т. д.

Дети в тетрадях пока не ведут записей, идет устное объяснение материала, некоторые рассуждения повторяются детьми одновременно, хором.

Число 5 больше числа 2. Точка Д правее точки Б.

Число 2 меньше числа 5. Точка Б левее точки Д, и т. д.

3. Учитель предлагает по рисунку числовой оси составить пример на нахождение суммы трех слагаемых (Н — начало отрезка, число нуль; К — конец отрезка, число 6; число 6 — это сумма; рис. 2).

4. Сравнение чисел осуществляем с помощью цветных брусков. (Это пособие — наиболее удобный прибор, объединяющий в себе дискретность и непрерывность: на бруске видны отдельные кубики, в то же время каждый брусок выступает как некоторая единая совокупность единиц.) Внизу расположен красный брусок с пятью делениями; над ним — синий брусок с четырьмя делениями (рис. 3).

Проводится следующая беседа.

*Учитель.* Сколько кубиков вверху (внизу)?

*Дети.* Вверху 4 кубика, внизу 5 кубиков.

*Учитель.* Сколько кубиков надо прибавить к верхнему (синему) бруску, чтобы получить столько же, сколько внизу, т. е. пять кубиков?

*Дети.* Надо прибавить 1 кубик.

*Учитель.* Прочитайте соответствующее выражение.

*Дети.* К 4 прибавить 1 — получится 5. (Учитель пишет на доске: 4 + 1 = 5.)

*Учитель.* Сколько кубиков надо отпилить от нижнего (красного) бруска, чтобы он стал такой же длины, что и верхний (синий) брусок?

*Дети.* Надо отпилить 1 кубик. От 5 отнять 1 — получится 4.

(Учитель дописывает строку: 5 — 1 = 4.)

*Учитель.* Сравните числа 4 и 5.

*Дети.* 5 больше 4 на 1, 4 меньше 5 на 1.

5. Учитель затем предлагает классу записать пропущенные числа в следующих четверках примеров:

| **3, 2, □,** | **4, 1, 5** |
|---|---|
| 3 + 2 = | 5 — 2 |
| 2 + 3 = | 5 — 3 |

6. Логические упражнения по картинкам. На первой картинке нарисована школа, около нее — пионер и октябренок.

*Учитель.* Сравните возраст октябренка и пионера. Как об этом можно сказать? С помощью каких слов сравнивается возраст людей? (Старше — моложе.)

*Дети.* Октябренок моложе пионера. Пионер старше октябренка.

*Учитель.* Сравните размеры вот этого окна и двери. Как можно сказать про их ширину двумя способами?

*Дети.* Дверь шире окна. Окно у́же двери.

На второй картинке нарисованы деревья разной высоты.

*Учитель.* Какое дерево вы видите слева (справа)?

*Дети.* Слева видим высокое дерево, справа — низкое дерево.

*Учитель.* Сравните два этих дерева.

*Дети.* Левое дерево выше правого, а правое дерево ниже левого.

На третьей картинке нарисованы движущаяся автомашина и летящий самолет.

*Учитель.* Что вы можете сказать о движении самолета?

*Дети.* Самолет движется быстрее автомашины. Автомашина движется медленнее самолета.

7. Решение взаимно-обратных задач.

Дети рассматривают картину, на которой нарисованы мальчик с 4 яблоками в корзине и девочка с 2 яблоками в корзине.

*Учитель.* Составьте задачу по этой картинке.

*Дети.* У мальчика было 4 яблока в корзине, а у девочки — 2 яблока в корзине. Сколько яблок было у мальчика и у девочки вместе?

Учитель делит доску на три части вертикальными линиями.

Соответственно, страница тетради тоже делится на три колонки.

Сначала решается задача в первой колонке:

| | | |
|---|---|---|
| **4, 2 □.**<br>4+2=6 | | |

*Учитель.* Мы решили прямую задачу. К данной прямой задаче можно составить две обратные задачи. В первой обратной задаче сделаем неизвестным число 4.

Запись приобретает вид:

| | |
|---|---|
| **4, 2, 6 ;**<br>4+2=6 | **□, 2, 6.**<br>? |

*Учитель.* Расскажите условие задачи.

*Дети.* У мальчика и девочки всего было 6 яблок. Из них 2 яблока было у девочки, остальные — у мальчика. Сколько яблок было у мальчика? Знак «клетка» означает искомое число.

*Учитель.* Как решать задачу?

*Дети.* От 6 яблок отнять 2 яблока — получится 4 яблока.

*Учитель.* Скажите ответ задачи.

*Дети.* У мальчика было 4 яблока.

После решения обратной задачи запись приобретает вид:

| | |
|---|---|
| **4, 2, 6 ;**<br>4+2=6 | **4 , 2, 6.**<br>6—2=4 |

Аналогично решается и вторая обратная задача: «Мальчик и девочка имели вместе 6 яблок. Из них мальчик имел 4 яблока, остальные — у девочки. Сколько было яблок у девочки?»

После решения второй обратной задачи все три задачи цикла оказываются записанными рядом, в трех параллельных колонках.

| *Прямая задача:* | *I обратная задача:* | *II обратная задача:* |
|---|---|---|
| 4, 2, 6.<br>4+2=6 | 4, 2, 6.<br>6—2=4 | 4, 2, 6.<br>6—4=2 |

Дети записывают решения всех трех задач в тетради в трех параллельных колонках (вверху — схема условия задачи, внизу — решение задачи).

Далее учитель записывает на доске решение следующей задачи (дети только слушают и отвечают на вопросы учителя): «На стоянке стояли 5 легковых машин. Из них было 3 «Москвича», остальные — «Волги». Сколько всего «Волг» стояло на стоянке?»

*Учитель.* Сколько всего машин было на стоянке?

*Дети.* На стоянке было всего 5 машин.

*Учитель.* Сколько «Москвичей» стояло на стоянке?

*Дети.* Всего было 3 «Москвича».

*Учитель.* Какие были остальные машины? Сколько было «Волг»?

*Дети.* От 5 отнять 3 — получится 2.

*Учитель.* Как сказать ответ задачи?

*Дети.* На стоянке было 2 машины «Волга».

Решение прямой задачи записывается так: $5-3=2$. (Любую задачу, которая решается первой и затем подвергается преобразованию в обратную, мы называем здесь прямой задачей.)

8. *Учитель.* Назовите компоненты сложения и вычитания.

| | |
|---|---|
| $4+1=5$ | $5-1=4$ |
| 4 и 1 — слагаемые, | 5 — уменьшаемое, |
| 5 — сумма. | 1 — вычитаемое, |
| | 4 — разность. |

9. Самостоятельная работа: рассказать про состав числа 6.

Учитель пишет на доске *деформированные равенства;* общая сумма (6) изображается крупной цифрой:

$$\begin{matrix}\square+1\\5+\square=\\2+\square\end{matrix}\ 6.$$

Дети записывают в тетради сразу решение в виде столбца примеров.

В конце урока детям предлагается решить деформированные примеры, записав вместо клеток пропущенные числа, а вместо треугольников знаки действий:

$$\square+3=6, \qquad 6-\square\ \triangle 2,$$
$$2+\square=4, \qquad \square+3\ \triangle 5,$$
$$1+\square\ \triangle 5.$$

Приведем дидактический комментарий к описанному уроку.

Иные говорят, что целью эффективной методики должно стать умение непонятное сделать понятным. Мы бы усилили эту формулу: методические приемы должны сделать понятное очевидным (еще более понятным). Таков результат применения методической системы УДЕ.

В настоящее время об этом говорят и так: успех обучения зависит главным образом от технологических деталей учебника и урока, от операциональной проработки учебного материала.

Недостаточно сформулировать тот или иной методический совет в общем виде: надо его довести до конкретной реализации, до подбора упражнений, до формы записей примеров, до планирования отдельных деталей урока, до изображений некоторых фрагментов урока в виде цветной картины на доске, до отточенного диалога учителя с детьми.

Главная идея УДЕ — достижение целостности знания. Целостность знания достигается полнотой системы упражнений. В информационном отношении важно, чтобы взятые в небольшом наборе

элементы изучаемого были связаны друг с другом на уроке как можно более разнообразными смысловыми связями.

Для практического работника — учителя, ведущего непосредственное обучение, важно помнить небольшое число новых принципов обучения, сформулированных доступно учителю, которые ему нетрудно осуществить, дабы воспользоваться преимуществами УДЕ.

Сравнивая структуру описанного урока со структурой распространенной на практике формы урока, мы обнаружим в ней следующие черты, которые в совокупности дают эффект высококачественного, сознательного усвоения знаний:

1. Совместное и одновременное изучение взаимосвязанных понятий (например, сложения и вычитания).

2. Обращение суждений. Противопоставление понятий (например, прямая и обратная задачи; задачи на нахождение суммы и неизвестного слагаемого; прямой и обратный счет; плюс и минус; больше и меньше и т. п.).

3. Самостоятельное составление задач учащимися по схеме.

4. Восстановление деформированных равенств ($1+\square=6$ и т. п.).

5. Прицельное использование графической (рисуночной) информации.

6. Матричная фиксация учебной информации (например, четверка примеров).

Эти технологические приемы работы над математическим учебным материалом, будучи применены комплексно, в связи друг с другом, и создают эффект методической системы УДЕ: программные знания осваиваются прочнее и на качественно более высоком уровне.

## § 2. ВЗАИМОСВЯЗЬ ТЕОРИИ И ТЕХНИКИ ОБУЧЕНИЯ В УКРУПНЕНИИ ДИДАКТИЧЕСКОЙ ЕДИНИЦЫ

Взаимопротивоположность рассудочных определений мысли: *поляризация.* Подобно тому как электричество, магнетизм и т. д. поляризуются, движутся в противоположностях, так и мысли. Как там нельзя удержать одну какую-нибудь односторонность, о чем не думает ни один естествоиспытатель, так и здесь тоже.

*Ф. Энгельс*

Очень важно то, что, говоря о закономерности движения научного познания, Маркс вскрывает его трехфазный ритм.

*Б. Кедров*

Факт сокращения расхода времени благодаря укрупнению знаний удается измерить и зафиксировать. Однако же выяснить коренные причины качественного совершенствования знаний, имеющего место благодаря методической системе УДЕ, далеко не просто.

При обсуждении любых (как глобальных, так и локальных) вопросов теории и практики важно не упустить возможности оценить явления обучения не только предельно конкретно, с близкого расстояния (техники урока, структуры учебника), но и с «отдаленных» позиций в плане теории и философии обучения.

Начнем с конкретного примера. Учителям математики известно явление резкого возрастания интереса учащихся к целостным информационным конструкциям (пары контрастных задач, четверка примеров).

Например:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $3+7$ | $10-7$ | $3\cdot7$ | $21:3$ |
| $7+3$ | $10-3$ | $7\cdot3$ | $21:7$ |

Немаловажен вопрос: чем объяснить известный учителям феномен всплеска (пика) интереса при таком матричном упорядочении информации? Уместно здесь, конечно, увидеть проявление психофизиологической закономерности, а именно — эффекта «перемежающегося противопоставления контрастных раздражителей» (И. П. Павлов).

В самом деле, рассматривая человеческую речь на уровне физиологии, специалисты называют язык ареной противопоставлений: гласные и согласные, глухие и звонкие звуки и т. п. Еще в классических психологических опытах был установлен факт проявления в сознании не одиночных, а парных ассоциаций типа

«отец — мать», «больше — меньше», «вверх — вниз», «прибавить — отнять» и т. д.

Нелишне также вспомнить о действенности в обучении основного диалектического закона единства и борьбы противоположностей, имеющего важное значение в любых явлениях природы, общества и мышления.

Однако мы позволим себе здесь выход в область гипотез.

Мышление связано с освоением информации. Информация же передается между нейронами мозга по меньшей мере двумя путями: химическим и электрическим. Первый путь — это функционирование белковой молекулы (клубка нуклеотидной цепи), причем биологические свойства последней зависят не столько от ближних связей (между соседними молекулами цепи), сколько от третичной структуры (отдаленных связей молекул в свернутом клубке). Но это, так сказать, первое приближение к истине, поскольку с известной долей фантазии можно уподобить клубок живого вещества укрупненному блоку знаний.

Попытаемся же спуститься ниже по лестнице материи, из которой в конечном счете и состоит мыслящий мозг.

Открытие Д. И. Менделеевым таблицы химических элементов вскрыло неизвестные ранее тайны атомов, законы их родства, изменения и соединения в молекулы. Затем пришло время, когда ученые от дихотомии «металлы и неметаллы» перешли к противопоставлению ядра атома и электронной оболочки, сосуществующих в общем электрическом поле.

Новые открытия физиков привели к противопоставлению: протон, несущий одну единицу положительного заряда, и незаряженный нейтрон. Но вот находят уже теоретически нужным и полезным объяснить родство и взаимопревращение протона и нейтрона как состоящих из двух сортов гипотетических частиц (кварков), несущих... дробные заряды:

$a$-кварк имеет $(+\frac{2}{3})$ заряда, $b$-кварк имеет $(-\frac{1}{3})$ заряда.

Вся эта удивительная теория укладывается в поразительно простую матрицу:

| | $a$=кварк | $b$=кварк | общий заряд частицы |
|---|---|---|---|
| нейтрон | $\left(+\frac{2}{3}\right)\cdot 1$ | $\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot 2$ | 0 |
| протон | $\left(+\frac{2}{3}\right)\cdot 2$ | $\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot 1$ | 1 |

Мы, вероятно, будем недалеки от истины, считая, что мышление как-то связано с взаимодействием нейронов, молекул, атомов и... кварков! В этом смысле эффективность метода противопоставления контрастных носителей учебной информации имеет глубинный смысл, а первопричиной, быть может,— двойственную структуру материи в самых ее истоках...

Да будет позволено предположить, что эффективность матрицирования знаний, эта характерная черта методической системы УДЕ, имеет отдаленное отношение к ... природе взаимодействий элементарных частиц вещества.

Из-за наличия множества факторов, влияющих на результативность обучения, иные исследователи ограничиваются простым описанием так называемого передового школьного опыта.

При всей неразработанности проблемы аргументации в педагогике нельзя склоняться к суждению, что якобы «нет и не может быть универсальных средств обучения». Термин «универсальность» чаще всего применяется теми оппонентами, у которых нет убедительных фактических доводов для запрета эффективной методики, «торможения» того или иного эффективного технологического приема. Так, один из наших рецензентов следующим образом «отвергал» понятие «противопоставление», сохранявшееся много лет в программах по математике для начальной школы. Пусть, дескать, на уроке изучается таблица умножения. После ознакомления с намеченными случаями умножения, скажем, на 6 ($6 \cdot 1 = 6$; $6 \cdot 2 = 12$ ... $6 \cdot 10 = 60$) почему нельзя вспомнить определение ... разности (?), повторить правило об измерении длины в сантиметрах и т. п. (?).

Оппонент рассуждал так: ведь понятия «умножение» и «отрезок» или «треугольник» и «разность» — различные (контрастные) понятия, и размышления о них одно вслед за другим и есть якобы противопоставление. Между тем здесь допускается логическая ошибка подмены понятия.

Термином «перемежающееся противопоставление» раздражителей И. П. Павлов обозначал целесообразность предъявления с промежутком в несколько секунд или минут не вообще каких угодно различных раздражителей, но раздражителей родственных, какой-либо одной природы, различающихся лишь по одному из параметров, например: звуки высокий и низкий (родство — звуковые колебания), сильный и слабый свет (электромагнитные колебания), окружность и эллипс (замкнутые кривые) и т. п.

«Повторяя» сразу за таблицей умножения правило нахождения неизвестного вычитаемого, мы не получаем противопоставления раздражителей в духе И. П. Павлова; в то же время, изучая совместно таблицу умножения и деления ($6 \cdot 3 = 18$ и $18:3 = 6$; $60 \cdot 3 = 180$ и $180:3 = 60$ и т. д.), мы действительно осуществляем противопоставление. И соответствующая методическая техника проведения урока действительно оправдывается на практике, по-

скольку здесь прослеживается родственная общность чисел и действий в контрастных операциях. Универсальность метода условных рефлексов как раз и заключается в том, что мы не упускаем ни одного случая в обучении, где можно противопоставлять родственные понятия, имеющие информационное единство, но различающиеся по одному из признаков. Например, совместное изучение сложения и вычитания целых чисел (дробей, многочленов, векторов, матриц) всегда оправдывается, ибо совмещение этих контрастных операций во времени и пространстве, фиксация информации в двух параллельных колонках тетради или доски удовлетворяют оптимальным условиям выработки цепей временны́х связей.

В методологии педагогических исследований в последнее время особую важность обретают понятия «линейность» и «концентричность» в структуре знаний.

Понятия «линейность» и «концентричность» связаны таким же образом, как понятия «мысль» и «чувство» (в психологии), «педагогическая теория» и «методическая техника урока» (в дидактике), «анализ» и «синтез» (в познании), «заряд» и «электрическое поле» (в физике) и т. п.

Рассматривая подобные дополнительности, Ф. Энгельс указывал, что, «вместо того чтобы односторонне превозносить одну из них до небес за счет другой, надо стараться применять каждую на своем месте, а этого можно добиться лишь в том случае, если не упускать из виду их связь между собой, их взаимное дополнение друг друга»[1].

Между тем при смене программ или методических концепций иногда шарахаются от одного из этих понятий к другому, полностью отрицая роль первого, в то время как важно учитывать связь обоих факторов при решении любого конкретного вопроса программы или учебника.

В передовой статье первого номера журнала «Математика в школе» за 1986 г. справедливо отмечено, что «предусмотренное в программе укрупнение тем создает основу для улучшения систематичности и логической последовательности изложения, что существенно с позиций научной состоятельности курсов». Однако авторы статьи тут же себе противоречат, когда заявляют, что в новых программах поставлена цель... «устранить концентризм».

В передовой статье «Учительской газеты» от 15 марта 1986 г., посвященной новым школьным программам, говорится следующее: «Содержание образования строится по так называемому линейному принципу, т. е. последовательно изучается каждый предмет от V до XI класса». Однако односторонность подобного толкования показана другими публикациями на ту же тему.

[1] *Энгельс Ф.* Диалектика природы. М., 1982. С. 196.

Например, известный методист по химии профессор В. Полосин справедливо указывает в той же газете, что в новых программах по химии предусмотрено, чтобы «теоретический материал циклически повторялся, углубляясь и расширяясь». Так раскрывается роль «концентризма», дополнительного к «линейности», отказ от которого приводит, как мы покажем ниже на материале математики, к нарушению системности знаний и неизбежному ухудшению усвоения знаний.

Принцип концентризма можно уподобить тому, как наслаиваются слои в растущей ... луковице, причем сама последовательность слоев соответствует линейности.

Обратимся к схематической наглядности.

Рис. 4,а соответствует ситуации, когда объем учебного материала возрастает односторонне, линейно, «только вверх»; здесь, несомненно, ущемляется, скажем, углубление в логические связи, в доказательные рассуждения, но зато превалирует обучение показом, подражанием, накопление необходимых умений без глубокого теоретического обоснования изучаемого материала.

Рис. 4,б соответствует ситуации увлечения односторонним углублением (скажем, ранней аксиоматизацией математики или строгостью определений, стремлением формально-логически «доказывать все»).

Если рис. 4,а вызывает ассоциацию с бурным развитием кроны дерева при хилых корнях, то рис. 4,б вызывает представление о неразвитой кроне при мощной корневой системе. Понятно, что оба этих процесса по законам живой природы рано или поздно обрываются, идет ли речь о растении или о росте знаний человека.

На рис. 4,в показано соразмерное накопление фактических знаний по математике (умений и навыков вычислять, измерять) и

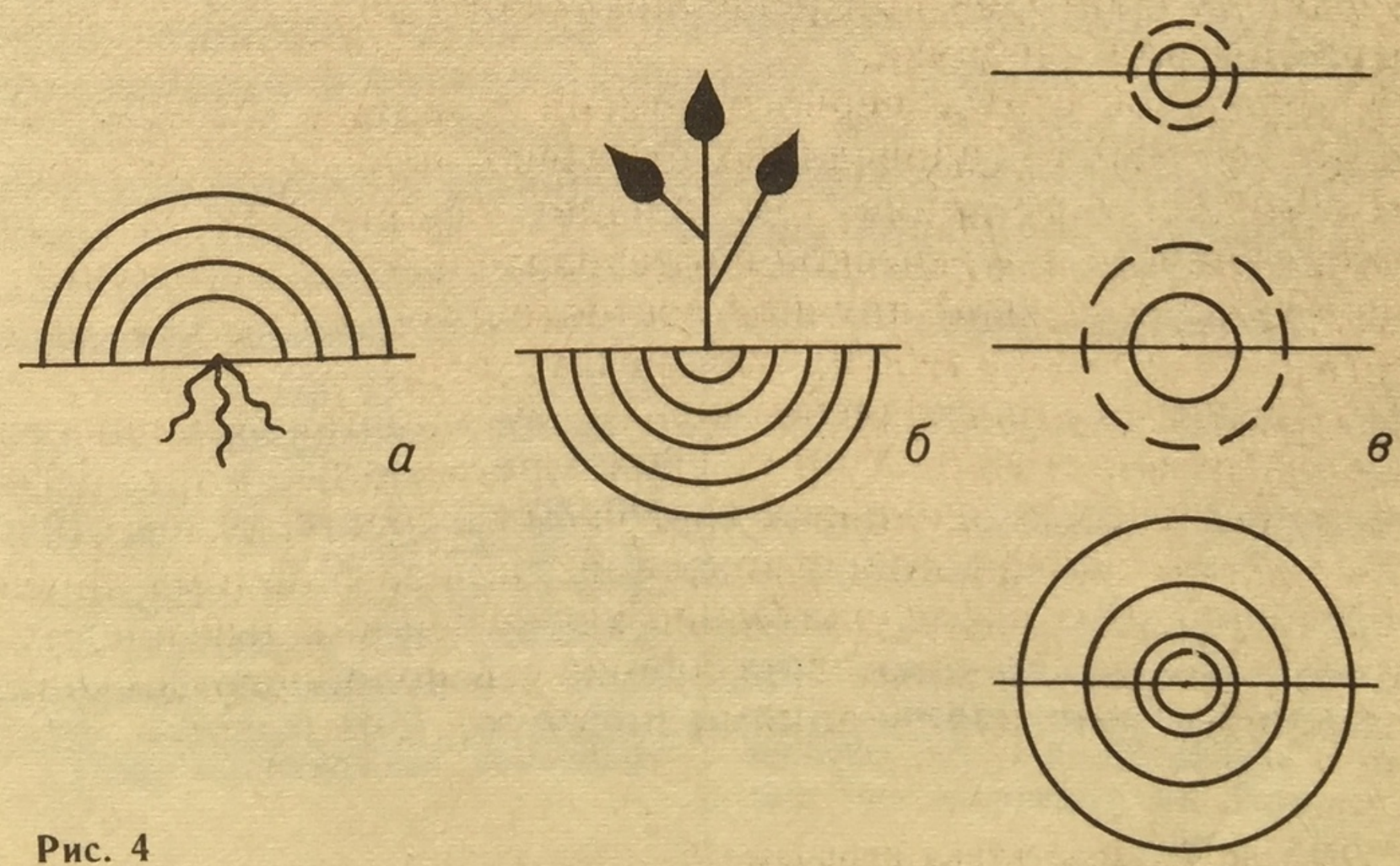



Рис. 4

соответствующих логических приемов упорядочения знаний, оформления этой информации в понятиях, суждениях и умозаключениях. Здесь нет ни раннего увлечения аксиоматикой, ни бездумного тренажа: «Делай так!»

Многое говорит, что наиболее выгодная стратегия в распределении материала в программе, в структуре учебника математики выражается именно третьим рисунком (4,в): здесь линейность как бы органично сочетается с концентричностью (и наоборот).

Такое сочетание достигается при создании единого фузионистского курса математики (слияние алгебры с геометрией) или при объединении планиметрии со стереометрией в едином курсе геометрии; подобная реформа принесет мышлению школьника такое приращение структурной информации, которое трудно даже представить.

А вот другой пример. Линейные функции, уравнения и неравенства должны быть первой главой алгебры, а квадратные функции, уравнения и неравенства — следующей главой. Логично здесь увидеть своеобразную линейность, поскольку образы первого порядка предшествуют образам второго порядка (но внутри каждой подтемы достигается концентричность!).

Рассмотрим далее пример из программы начальной школы. На втором году обучения добрых 5 месяцев подряд дети проводят вычисления только в пределах 100. Иначе говоря, здесь концентр «сотня» предшествует во времени концентру «тысяча», в согласии с многолетними традициями обучения математике в начальной школе. Здесь, так сказать, торжествует линейность.

Между тем в нашем опыте экспериментального обучения на основе УДЕ в пос. Черноголовка Московской области (1977—1980) найдено, что слияние воедино концентра «сотня» с концентром «тысяча» (круглые десятки) позволяет добиться не только резкого сокращения расхода учебного времени (до 20%), но, главное, качественного скачка в математическом развитии учащихся. В чем же здесь дело?

Сравним системы изложения материала в стабильных и пробных учебниках начальной школы.

*В учебнике Моро:*

6·3= ,
6·5= ,
6·4= ,
6·7= ,
6·8= и т. д.

Здесь нет выхода в пределы 1000, нет деформированных заданий (заданий с «окошечками»), нет обращения заданий, нет уравнений, нет именованных чисел.

*В учебнике Эрдниева:*

6·7=□, 42 : 6=□,
□·8=48, 48 : □=6,
60·7=□, 70·6=□;
420 : 60=□, 4 руб. 20 коп. : 70=□;
4 ц 80 кг : 50 кг=,
4 м 20 см : 7=;
$x$·6=42, 420 : $y$=70

Здесь деформация, обращение, выход в пределы 1000 (круглые десятки), уравнения, именованные числа.

Эффективность второго подхода (пропедевтики концентра «тысяча» в пределах сотни) видна из следующего психологического наблюдения. Ученику было предложено семейство различных упражнений, в которых используются только три цифры (7, 9, 0): $7 \cdot 9 = \square$; $70 \cdot 9 = \square$; $\square \cdot 90 = 630$; $70 \cdot \square = 630$; $700 \cdot 9 = \square$; затем неожиданно ему было предложено задание на умножение круглых десятков на круглые десятки. Ученик (средний по успеваемости) сам находит ответ на совершенно новое задание, еще не объясненное учителем: $70 \cdot 90 = 6300$. Как объяснить этот факт саморазвития мысли, факт возникновения у него новой ассоциации, приводящей к правильному ответу?

Вероятно, здесь работает алгоритм «оперирование с нулем», а именно:

$$9 \cdot 7 = 63,$$
$$90 \cdot 7 = 630,$$
$$900 \cdot 7 = 6300,$$

т. е. возникает ассоциация: «добавление нуля к одному из сомножителей → дополнение нуля к произведению». (Ассоциация самопроизвольная, без пояснений учителя.) Таким образом, здесь имеет место спонтанное возникновение следующего перехода:

$$\square \cdot 7 = \triangle,$$
$$\downarrow$$
$$\square 0 \cdot 7 = \triangle 0.$$

Не преминем здесь увидеть глубинный смысл: последовательное применение системы УДЕ создает условия для самонаращивания знания, т. е. подсознательного превращения той или иной изолированной одиночной связи в цепь (или куст) взаимосвязанных ходов мысли.

Явление опережения учеником мысли учителя было отмечено русским методистом В. Латышевым. Так, он заметил, что, если предлагать заучивание совместной таблицы умножения и деления, ученик сам находит (до объяснения учителя!) результат деления.

Пусть учитель объяснил: $2 \cdot 6 = 12$; $12 : 6 = 2$. Пусть далее подсчитано: $2 \cdot 7 = 14$.

Ученик, не дожидаясь пояснений учителя, произносит: «14 поделить на 7 равных частей — получится 2».

Соблюдение концентризма в данном случае отнюдь не отрицает линейности: линейность в последнем случае также соблюдается, но между более сложными обазованиями, между целыми блоками знаний.

*Линейность в учебнике Моро:*

$5 \cdot 7 =$ ,
$35 : 7 =$ .

↓

$50 \cdot 7 =$ ,
$350 : 7 =$ .

Здесь линейность обедненная, поскольку внутри каждого этапа цикличность операций не достигается.

*Линейность в учебнике Эрдниева:*

| | |
|---|---|
| $5 \cdot 7 =$ , | $35 : 7 =$ , |
| $5 \cdot 7 =$ , | $35 : 7 =$ , |
| $7 \cdot 5 =$ , | $35 : 5 =$ , |
| $50 \cdot 7 =$ , | $350 : 7 =$ . |
| $\square \cdot 5 = 3$ м 50 см, | $\square : 50 = 7$ кг. |

Здесь концентризм осуществляется внутри усложненных элементов, которые, в свою очередь, выстраиваются также линейно . Здесь — линейность высшего порядка.

Мы видим, что в обоих случаях соблюдается линейность: пример в пределах 100 (скажем, $5 \cdot 7 = 35$) предшествует соответствующему примеру в пределах 1000 ($50 \cdot 7 = 350$). Это, так сказать, логическая характеристика явления.

Однако обучение математике бывает успешным, если упражнение, являясь элементом цикла, порождает обратную связь, когда умножение тут же проверяется делением ($5 \cdot 7 = 35 \rightarrow \rightarrow 35 : 7 = 5$), и наоборот. И если возникли обратные связи, контроль операции, чувство комфорта, то это становится психологическим сигналом завершения цикла.

Можно сказать упрощенно так: если соблюдение линейности удовлетворяет формальным требованиям «от простого к сложному», то принцип концентризма обеспечивает прежде всего осмысленность и прочность знаний.

Искусство обучения во многом заключается в умении сочетать логику расширения знания с психологией углубления во внутренние связи между компонентами целостного знания. Дидактические понятия «линейность» и «концентричность», будучи специфическими проявлениями принципа дополнительности в обучении, теснейшим образом связаны с фактором времени. Правильное построение программ и учебников — это психологически и методологически оправданное распределение программного материала во времени с учетом информационных связей между изучаемыми темами.

В настоящее время во вторых классах целый год дети изучают таблицу умножения; однако вычисление площади прямоугольника рассматривается через год. Такое решение структуры знаний нельзя не назвать метафизическим: умножение — само по себе, площадь — сама по себе (вне связи с умножением). Между тем, построив, скажем, прямоугольник размером $3 \times 4$, дети тут же пересчетом клеток не только находят число 12 (произведение), но, кроме того, тут же убеждаются, что при перемножении двух линейных мер возникают квадратные единицы; сама по себе возникает мысль: площадь не может не изме-

ряться в квадратных сантиметрах! Кроме того, переместительный закон умножения воспринимается зрительно, одномоментно как реальность; площадь одной и той же фигуры сохраняется, как бы мы ее ни подсчитывали — по строкам или по столбцам (рис. 5):

$$\begin{array}{l} 4+4+4= \\ 3+3+3+3= \end{array} 12 \begin{array}{l} =4\cdot 3, \\ =3\cdot 4. \end{array}$$

(Поистине удивительно, что переместительные законы сложения (умножения) не названы своим именем в «Программах для четырехлетней начальной школы» (М., 1985).)

Основательность всякой дидактической концепции (в данном случае идеи УДЕ) достигается прежде всего характеристикой изучаемого явления в системе парных категорий материалистической диалектики. Парные категории «линейность и концентричность» имеют прямое отношение к теории и практике обучения задачам — центральному вопросу методики.

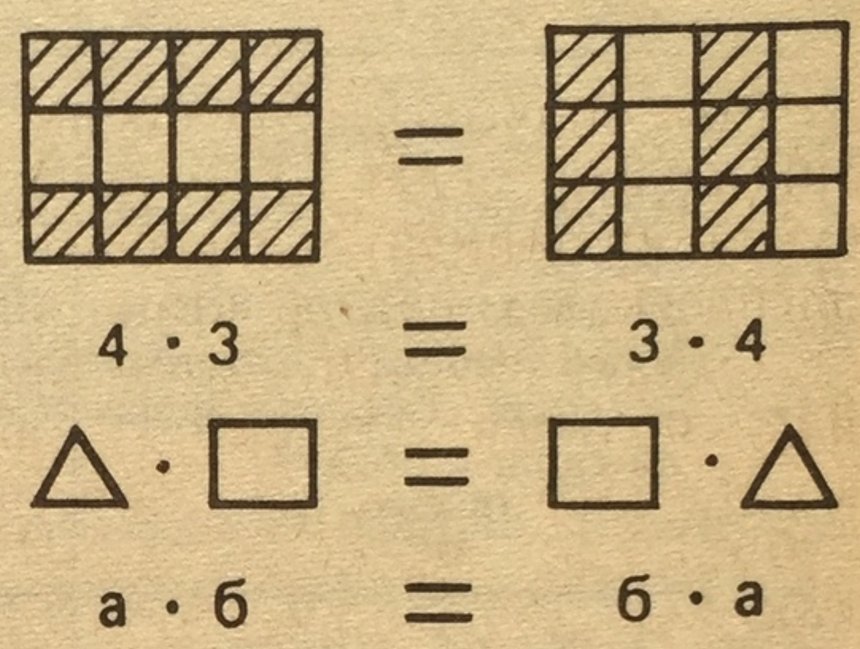



Рис. 5

Все разнообразие простых задач на сложение и вычитание удобно представить в виде трех циклов, по три задачи в каждом. Основу системы задач составляет первый цикл — задачи на нахождение суммы и неизвестного слагаемого; второй цикл — это задачи на нахождение разности, уменьшаемого и вычитаемого; третий, решающий, цикл — задачи на увеличение и уменьшение числа на несколько единиц и на разностное сравнение чисел.

Связи по вертикали (линейность!) и по горизонтали (концентричность!) наглядно видны в матрице девяти видов этих задач (с. 28).

В данной таблице приведены с исчерпывающей полнотой разновидности всех задач на действия первой ступени. Эта система предопределяет и технологию работы над этими задачами в работе учителя:

1. Задачи изучаются последовательно по циклам, начиная с I цикла (задачи на нахождение суммы и слагаемых). Третья задача цикла рассматривается опять же не изолированно, а в сравнении с первой парой задач этого цикла, посредством преобразования ее после решения в одну из предыдущих форм цикла. Затем изучаются задачи II цикла также в сравнении и взаимопереходах (сначала совместно на нахождение остатка и уменьшаемого, а затем — вычитаемого). Наконец, изучаются зада-

Матрица простых задач

| Цикл | Задачи на сложение | Задачи на вычитание | |
|---|---|---|---|
| Усложнение (обобщение) | | *I обратная:* | *II обратная:* |
| III | *Прямая задача:*<br>Увеличение числа на несколько единиц.<br>Мише 7 лет, а Нина старше на 2 года. Сколько лет Нине?<br>(7+2=9) | Уменьшение числа на несколько единиц.<br>Нине 9 лет, а Миша моложе ее на 2 года. Сколько лет Мише?<br>(9—2=7) | Разностное сравнение.<br>Нине — 9 лет, а Мише — 7 лет. На сколько лет Нина старше Миши?<br>(9—7=2) |
| II | *I обратная:*<br>Нахождение уменьшаемого.<br>За обедом съели 6 груш; после обеда осталось 4 груши. Сколько подали груш к обеду?<br>(6+4=10) | *Прямая задача:*<br>Нахождение остатка (разности).<br>На столе было 10 груш. За обедом съели 6 груш. Сколько осталось?<br>(10—6=4) | *II обратная:*<br>Нахождение вычитаемого.<br>На столе было 10 груш. После обеда осталось 4 груши. Сколько съели груш?<br>(10—4=6) |
| I | *Прямая задача:*<br>Нахождение суммы.<br>Отец принес 5 игрушек, мама — 3 игрушки. Сколько всего игрушек принесли?<br>(5+3=8) | *I обратная:*<br>Нахождение первого слагаемого.<br>Родители всего принесли 8 игрушек, из них папа — 5 игрушек. Сколько принесла мама?<br>(8—5=3) | *II обратная:*<br>Нахождение второго слагемого.<br>Родители принесли всего 8 игруше, из них мама — 3 игрушки. Сколько принес папа?<br>(8—3=5) |

чи III цикла (совместно — на увеличение и уменьшение числа на несколько единиц, а на их основе — на разностное сравнение и т. д.).

2. Исключительно выгодна техника работы над задачами каждого цикла по методике УДЕ, а именно: прямая задача рассматривается одновременно (в противопоставлении) с обратной задачей, причем переходы перемежаются: сначала, скажем, задача на нахождение суммы преобразуется в задачу с тем же содержанием, но на нахождение неизвестного слагаемого; в ходе тренировочных упражнений возможно сначала решить задачу на нахождение слагаемого, чтобы затем преобразовать ее в задачу на нахождение суммы, и т. п. Такая методика работы над этими задачами была описана в предыдущем параграфе.

Приведенная матрица наглядно показывает, что простые за-

дачи на сложение и вычитание образуют единую двумерную систему.

Если в программах и учебниках соблюсти систему понятий этой таблицы, то достигается особого рода линейность во временно́й последовательности задач. Так, следуя вертикальным связям, мы видим родство задач на нахождение суммы (I), на нахождение уменьшаемого (II), на увеличение числа на несколько единиц (III), поскольку они расположены в одном столбце. Однако понятно, что задача (I) структурно проще (II) и будет изучаться до (III) и т. д.

Каждый из 9 видов задач входит в один из трех циклов задач, предопределяющий переходы (преобразования) одного вида задачи в другой в пределах того же цикла. Алгоритм преобразования исходной задачи в обратную создает реальное триединство задач данного цикла, или, иначе говоря, крупную единицу усвоения.

Приведенная таблица ценна еще и тем, что простые задачи, связанные с действиями второй ступени, успешно осваиваются по аналогичной методике. (Таков результат нашего многолетнего испытания системы в школах.)

Известно, что величайшим достижением теории и метода науки явилось создание Д. И. Менделеевым таблицы химических элементов. Подобно этому и создание матрицы простых задач методистами XIX в. было одним из базисных достижений методики обучения математике.

Учет генетических связей между разновидностями простых задач, схваченных жесткой матрицей, как бы программирует соответствующую высокоэффективную технологию обучения с помощью методики УДЕ.

Технология обучения непосредственно связана с предельно конкретными деталями процесса обучения: порядком расположения записей и правил, компоновкой тем и параграфов, подбором задач, чисел и таблиц, выбором символов и терминов, созданием удачных обозначений и рисунков, графиков и упражнений, моделей и приборов, вариацией несловесной информации (толщина линий, цвет, формы знаков), конкретными приемами контроля знаний. Но все эти детали обучения в конечном счете и обеспечивают реальную осуществимость той или иной новации в дидактике.

Верное технологическое решение означает нахождение оптимальной последовательности фаз обучения во времени и пространстве урока и учебника. Короче говоря, под технологией УДЕ мы понимаем материализацию дидактической идеи в предельно конкретных рекомендациях, доступных для исполнения рядовым учителем, пусть специально и не изучавшим теоретические основы УДЕ как научного направления в педагогике. Вот два примера технологических решений УДЕ.

1. Вместо записи таблицы умножения с помощью 12 цифр (слева) целесообразно эти же результаты записать с помощью 9 цифр (справа):

$$\begin{matrix} 2\cdot 1=2, \\ 2\cdot 2=4, \\ 2\cdot 3=6, \\ 2\cdot 4=8. \end{matrix} \qquad 2\cdot \begin{matrix} 1=2 \\ 2=4 \\ 3=6 \\ 4=8 \end{matrix}$$

Информативность каждого знака во втором случае возрастает на одну треть.

2. Переместительность произведения выгодно иллюстрировать подсчетом клеток прямоугольника двумя способами, причем разъяснение материала проводится одновременно на нескольких кодах: числовом (конкретном) и буквенном (абстрактном); словесном (логическом) и рисуночном (образном).

## § 3. О ЦЕЛОСТНОСТИ И ДИАЛЕКТИЧНОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗНАНИЙ

> Целое... есть продукт мыслящей головы... субъект... должен постоянно витать в нашем представлении как предпосылка.
>
> *К. Маркс*

«Самые серьезные проблемы связаны, однако, с тем, что психологи очень много знают о том, как происходит процесс усвоения отдельных фактов и отдельных навыков, и слишком мало знают о том, как эти факты и навыки объединяются друг с другом и формируют значимые психические структуры.

Разумеется, очень важны и эффективные методики обучения отдельным фактам и навыкам, но главная задача состоит все же в развитии у учащихся структур знаний, представляющих собой нечто большее, чем простая сумма отдельных фактов»[1].

Многие свыклись с тем, что на первом году обучения дети довольствуются ныне только... двумя действиями арифметики (сложением и вычитанием).

Поэтому, если рассуждать чисто логически, школьник после года учения в школе не вправе отвечать на вопрос: сколько будет дважды два ($2\cdot 2=?$), поскольку он еще не изучал... умножения (?!).

Ущербность подобной «новации» в программе можно обнаружить лишь на основе методологических соображений: составитель учебника запамятовал философский принцип целостности, т. е. не учел, что даже «мини-математика» для шестилетних

[1] *Аткинсон Р.* Человеческая память и процесс обучения. М., 1980. С. 490.

детей должна основываться на четырех действиях арифметики, образующих фундамент для последующего возведения здания математики (именно так решена данная проблема в ГДР, ЧССР, где обучение по традиции уже давно начинается с 6 лет).

1. Укрупненная дидактическая единица устойчива к сохранению в памяти потому, что она обладает достоинством полноты, иначе говоря — наличием в ней всех основных элементов, образующих определенную целостность.

Рассмотрим простейший пример.

Что бы сказал читатель, если кому-то пришла в голову мысль решать пример 9·3 на втором году обучения, а пример 4·5 — на третьем? (А именно такое распределение материала предусмотрено в программах Министерства просвещения РСФСР для четырехлетней школы (М., 1985).)

Подобные приемы разбиения программного материала «сечением по живому» приводят к серьезному методологическому дефекту, ибо, оставаясь на почве элементарных атомарных знаний, мы лишаем воспитуемого умения обобщать, находить закономерности, связи между отдельностями.

Между тем табличные результаты следует рассматривать с охватом всех возможных случаев в пределах какого-либо числа, например 30 или 40. В этом случае 9·3 и 4·5, конечно, будут изучаться в одном разделе.

Другим примером целостности может служить ознакомление с переместительным законом:

$$\begin{matrix} 6+3= \\ 3+6= \end{matrix} \; 9 \qquad \begin{matrix} 6+3=3+6, \\ \square+\triangle=\triangle+\square \\ a+в=в+a. \end{matrix}$$

Таким образом, в понятие «целостность» разумно включить наличие двух уровней знаний — исходного и обобщенного, равенства в числах и соответствующего равенства в знаках и буквах. Разумеется, введение понятия о первом законе математики (переместительный закон сложения) должно осуществляться постепенно, через вариации знаков с многократным повторением соответствующего правила.

Переместительный закон сложения должен записываться в буквах уже в I классе. Такой шаг и есть разумная пропедевтика алгебры в недрах арифметики.

Учитель, не овладевший «технологией обучения», не может стать мастером. Однако ошибочно думать, что технологическое мастерство учителя якобы препятствует его новаторскому педагогическому искусству, творчеству в его практической деятельности. Как раз наоборот: упорядоченность и организованность любого процесса вырастает из стихии, творчество — из упрочившихся рутинных действий. Учителю-мастеру, разумеется, легче участво-

вать в коренном обновлении школы, нежели учителю, не овладевшему методикой и технологией. Как сказано в материалах февральского (1988 г.) Пленума ЦК КПСС, «учитель — важнейшее действующее лицо перестройки. Устранить все рогатки и барьеры на пути новаторства в педагогике, создать достойные материальные условия для творческого труда учителя». Сейчас провозглашается право на творчество для учителя. На наш взгляд, развертыванию этого творчества прежде всего сможет помочь разработка эффективной технологии обучения.

Эффективная технология обучения должна быть разработана столь детально и доступно, чтобы она могла быть осуществлена каждым учителем. В указанном смысле дидактическая идея, как и техническая, лишь тогда становится материальной силой, когда она доведена до технологических разработок и благодаря этому освоена массой исполнителей.

Технологические решения в силу предельной конкретности во многом сродни изобретательству и рационализаторству. Чтобы помочь заикающемуся, один врач запатентовал предложение: страдающему этим дефектом речи предлагается писать произносимое большими печатными буквами. Этот простой прием замедляет процесс проговаривания, что и помогает в какой-то мере в постепенном преодолении заикания. А вот аналогичный пример находки противоположного характера, но уже из технологии обучения. Для развития вычислительных навыков (автоматизированных умений) важно добиться ускорения мыслительных операций. Решение обычных примеров вида $5+7$, $6 \cdot 4$ и т. п. неэкономно.

Однако, предложив деформированный пример вида $\square \cdot \square = 24$, удается резко ускорить подсознательный перебор вариантов; результат таков: записан один пример, а решено в уме множество вариантов. Вот почему дети так любят примеры «с окошечками»!

Коллегия Министерства просвещения РСФСР в своем решении от 14 VI 1984 г. специально рекомендовала этот прием в качестве эффективной формы упражнений для начальной школы (Начальная школа. 1984. № 8). Данное решение — приятное исключение, когда конкретный технологический прием нашел официальную поддержку. Деформация равенств нами широко была использована в пробных учебниках для I—VI классов.

Авторы иных пособий, адресованных учителям, зачастую ограничиваются теоретическим изложением материала, вовсе не приводя практических заданий: в лучшем случае авторы предлагают набор разнородных упражнений, оставляя выбор их для конкретного урока на усмотрение самого учителя. Надо отметить, что бесплодность в создании новых технологических приемов обучения бывает характерна большей частью для авторов, не имеющих личного опыта работы учителем в школе.

2. Принцип систематичности в изложении материала толкуют часто ограниченно в учебниках математики, относя его лишь

к теоретической части книги. Все считают, что набор задач и отбор пригодных для конкретного занятия — дело только учителя, исполнителя методики. Между тем технология эффективного обучения требует, чтобы применительно к задачам осуществлялось жесткое правило «непрерывной последовательности группы задач», обеспечивающее (как и в производственных патентах) гарантируемые результаты усвоения знаний.

Методическая идея может быть реально внедрена, только получив детальную технологическую разработку в учебниках.

Всякая технология как категория экономическая обладает стоимостью. Передовая технология обучения, приносящая реальную экономию времени школьника и учителя, несомненно, равноценна экономии материальных ресурсов. Нередко отстаивание принципов действительно передовой технологии обучения и в той же мере завуалированные попытки тормозить распространение оправдавшей себя технологии обретают драматическую форму. Это явление в педагогике усложняется еще и тем, что по существующим положениям педагогические идеи, хотя и обладают стоимостью, не патентуются.

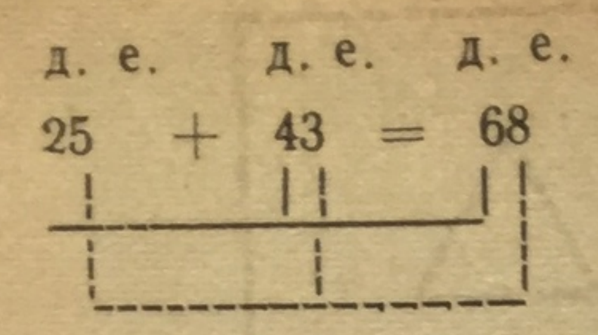
Трудности внедрения передовой технологии обучения связаны также и с тем, что на ее пути стоят барьеры из различных устремлений, выступающих в форме мнений некоторых коллективов: составляющих программы, создающих теорию учебника и урока, разрабатывающих положения о конкурсе учебников или процедуру проведения самого конкурса (экспертные оценки, правила голосования). На каждом из этих этапов возникают противоречивые ситуации, разрешить которые далеко не просто. Однако же главное в этой цепи решений — издание высокоэффективного учебника математики, который не сразу может получить признание и распространение.

Эффективность того или иного технологического решения вопросов обучения зависит прежде всего от структурной информации, проявляющейся в момент перехода от одной решенной задачи (упражнения) к другой. Поясним сказанное.

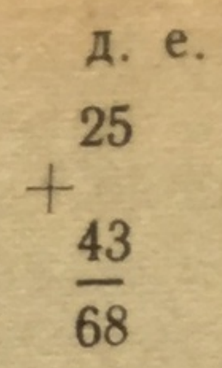
В генетике отмечено, что изменение положения даже одной молекулы в цепи нуклеотидов приводит нередко к тому, что возникает совершенно другой организм. Особо ценная информация заключается нередко в самой последовательности операций, задач, параграфов учебника.

3. Полезная находка для уроков математики — матричное оформление знаний. В самом деле, даже такая простая, казалось бы, вещь, как клетчатая бумага, чрезвычайно удобная для изображения матриц, используется сейчас от случая к случаю, хотя умелое применение матриц способно существенно улучшить усвоение знаний. Очень важно, например, уже начиная с I класса перейти на вычисления в столбик.

Сравним два способа решения следующего примера:




Решение при записи «в строчку». Прослеживая зрительно в условии записанного в строчку примера цифры 2, 5, 4, 3, 6, 8, маленький человек вынужден провести содержательную классификацию цифр по их позициям в пределах каждого двузначного числа: сложить сначала цифры, расположенные слева (десятки), записать эту сумму (2+4=6); потом то же самое сделать с цифрами, расположенными справа (5+3=8), и записать вторую сумму также справа. Алгоритм сложения чисел, записанных в строчку, достаточно сложен, требует лишних усилий для запоминания и всегда осуществляется дольше, чем при записи слагаемых в столбик; этим и объясняется возникновение ошибок при решении примеров, записанных в строчку. Из-за записи примеров в строчку учащиеся теряют скорость чтения математической информации (примечательно здесь то, что в новых психологических исследованиях быстрого чтения рекомендуется чтение не по диагонали, а по вертикали).




Обратим вначале внимание на то, что запись в столбик компактнее, занимает меньше места. Уже это обстоятельство ускоряет переработку соответствующей информации. Решение начинается общим приемом — записью слагаемых друг под другом. Выполнение этой операции как бы автоматически расставляет цифры «по местам»: значения одного разряда оказываются при этом друг под другом. При записи в строчку значения единиц и десятков приходится выискивать, просматривая каждый раз всю строку. Запись столбиком в особенности облегчает усвоение операций с переходом через десяток, ибо сама запись содействует пониманию как смысла возникновения десятка из единиц (при сложении), так и необходимости раздробления одной единицы высшего разряда в десять единиц низшего разряда:

$$\begin{array}{r} 9 \\ +\ 3 \\ \hline 12 \end{array} \text{ и } \begin{array}{r} 12 \\ -\ 9 \\ \hline 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 29 \\ +\ 13 \\ \hline 42 \end{array} \text{ и } \begin{array}{r} 42 \\ -\ 29 \\ \hline 13 \end{array}$$

Запись в столбик чрезвычайно удобна при совместном изучении сложения, вычитания, т. е. при расположении взаимно-обратных действий на доске и в тетради в симметричных положениях друг против друга

Психологи, изучающие передачу информации между человеком и обезьяной, установили, что обезьяна понимает символическую информацию только тогда, когда фигуры, образующие элементы команд, располагаются одна под другой (а не рядом) (рис. 6).

В данной связи надо сказать, что проблема «крупноблочного» построения учебных предметов стала сейчас предметом внимания не только учителей математики. Нами зафиксировано более 200 печатных откликов учителей и методистов (у нас и за

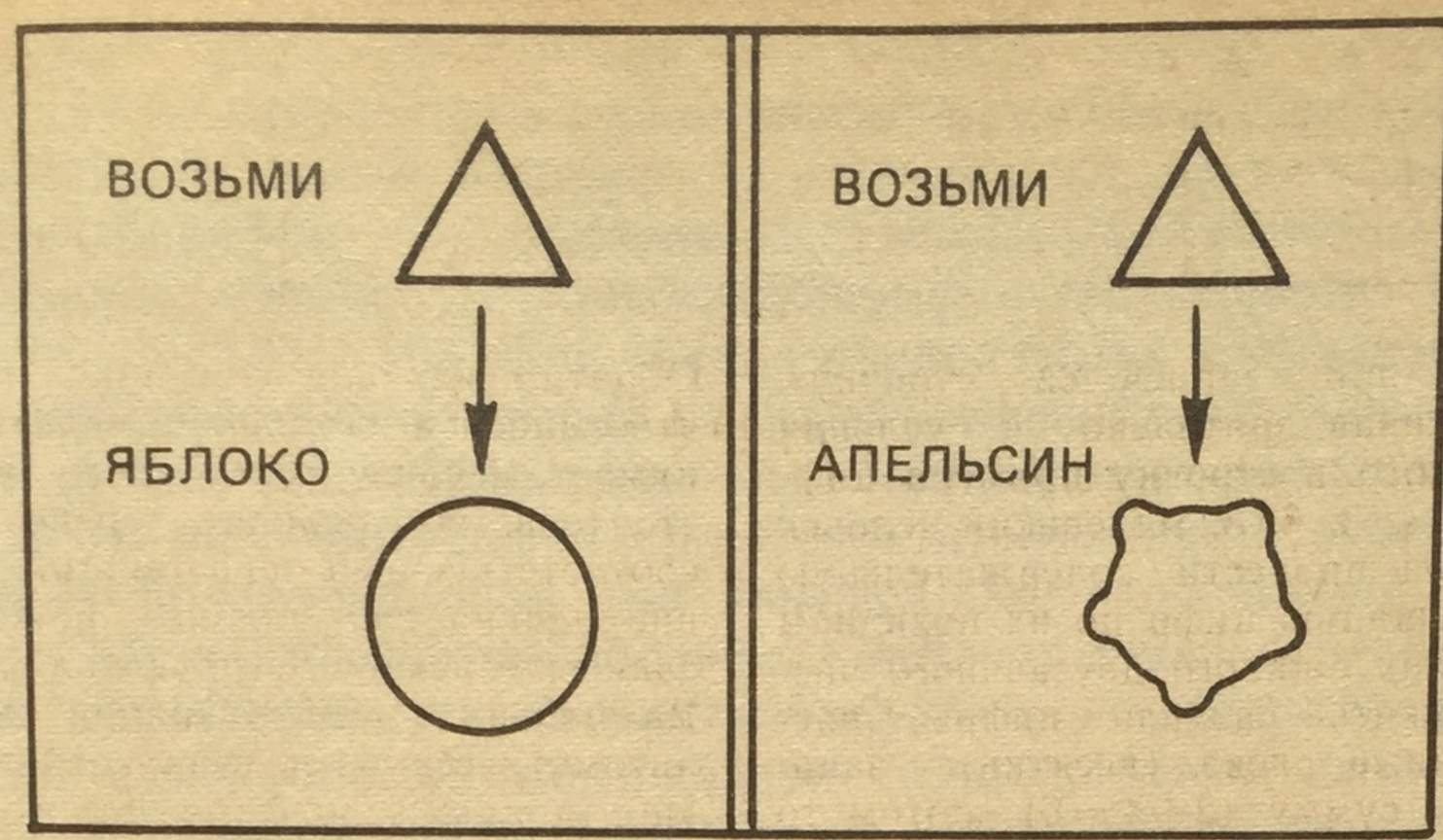



**Рис. 6**

рубежом), подтверждающих значимость идеи УДЕ как новой дидактической закономерности, обеспечивающей оптимальную работу мозга. На протяжении многих лет мы тщетно охотимся за фактами или обобщениями в печати, которые противоречили бы в той или иной мере выдвинутой идее, что, несомненно, подтверждает жизнеспособность УДЕ как нового направления в педагогике. Тем не менее остается постоянной наша забота упрочения данной идеи новой аргументацией, чтобы обнаруженная дидактическая истина могла быть признана и принята на вооружение в качестве закона обучения возможно большим числом педагогов.

Рассмотрим в связи с этим подробнее информационный аспект укрупнения знаний. Начнем с простейших иллюстраций.

Формулу воды в химии записывают двояко:

| символически | структурно |
|---|---|
| $H_2O$ | H—O—H |

Намеренно упрощая суть дела, скажем так: символическая запись молекулы воды, состоящая из трех знаков (H, 2, O), информационно беднее структурной формулы той же молекулы (H—O—H) хотя бы потому, что в последней формуле не три, а пять (!) знаков, из коих две черточки обозначают не атомы вещества, а связи между атомами водорода и кислорода. Нечто аналогичное наблюдается и при переходе от элементарных знаний к укрупненным единицам усвоения.

Пусть школьник заучивает не изолированную таблицу сложения ($4+2=6$; $4+3=7$ и т. д.), а таблицу сложения, совмещенную с таблицей вычитания.

| | |
|---|---|
| $4+2=6$, | $6-2=4$, |
| $4+3=7$, | $7-3=4$, |
| $4+4=8$, | $8-4=4$ и т. д. |

В этом случае появляется, как и в случае структурной формулы вещества, качественно новая информация — «информация связи» между сложением и вычитанием, между слагаемым (2) и вычитаемым (2), между слагаемым (4) и разностью (4), между суммой (6) и уменьшаемым (6), между увеличением и уменьшением на несколько единиц и т. п.

Или еще: составление обратных примеров или обратных задач для «решающего человека» (для школьника) означает не только восприятие сторонней (от учителя!) информации, но и создание самим школьником необходимой ему дополнительной информации. Здесь логично увидеть ключевой методологический момент «крупноблочного» строительства знаний и саморазвития знаний школьника, возникающего посредством самообучения за счет качественно более ценной структурной информации.

В связи со сказанным становится понятным, почему некоторые опытные методисты, например Л. Ф. Пичурин, увидели в качестве основного в УДЕ то, что оно содействует становлению зачатков диалектико-материалистического мировоззрения.

Становится понятным и обогащение эмоционального фона усвоения школьником «укрупненного знания». «Но вот я,— писала в газете «Правда» (1971. 9 мая) учительница из Одессы,— признаюсь, не удерживаюсь: стала вталкивать в рамки нашей и без того перегруженной программы то основное, на чем зиждется метод Эрдниева: взаимно-обратные действия, составление и усиленное решение обратных задач. Это увлекает детей, всех без исключения, мысль их работает активно и радостно».

Специального внимания заслуживает такая методологическая особенность укрупненного знания, как его целостность, являющаяся одновременно как целью, так и средством обучения. Данная проблема заслуживает того, чтобы начать анализ явления издалека.

В психологии известно так называемое «правило восприятия Миллера — $7 \pm 2$», что означает: здоровый человек способен запомнить одномоментно (без пересчета) от 5 до 9 объектов. Этим, собственно, и определяется объем так называемой оперативной памяти человека.

Предпочтение человеком числа 7 выявлено у всех народов в лингвистике, археологии, этнографии: семь цветов радуги, семь нот музыкальной грамоты, семидневная неделя; отнюдь не случайны словосочетания: семь чудес света, седьмое небо, семеро одного не ждут, семи пядей во лбу, семь раз отмерь — один раз отрежь, семиречье и т. д. По-видимому, в пределах 7—9 находилась верхняя граница восприятия числовых множеств доисторическим человеком. Есть над чем тут задуматься: почему же все-таки семь?

Небезынтересна попытка объяснения склонности психики че-

ловека к числу 7 через не менее «знаменитое» число... 3 (!?), которое имеет отношение к экономному кодированию информации. Но расскажем все по порядку.

Ребенок рождается с готовым генетическим аппаратом ориентировки в *трехмерном* пространстве (длина, ширина, высота параллелепипеда); сетчатка человеческого глаза состоит из трех типов колбочек, обладающих избирательной чувствительностью к трем базисным цветам: синему, зеленому, красному. Смешением этих основных цветов в той или иной пропорции можно получить любой оттенок радуги, любую цветовую гамму.

Природа не любит излишеств, и трехпараметрические механизмы переработки информации оказались, по-видимому, оптимальными как для каждого органа чувств, так и для самих высших уровней мышления, вплоть до абстрагирующих механизмов познания действительности.

В самом деле, наследственная информация живого мира тоже записывается на основе трехбуквенного алфавита. Не с этим ли в конечном счете связан фундаментальный результат, полученный экспериментально в психофизиологии: «Если приборов больше или меньше трех, в среднем оператор тратит больше времени на сигнал»[1].

Так вот, параметр в простейшем случае может находиться в одном из двух состояний: есть сигнал — нет сигнала (да — нет, ноль — единица). Три параметра (каждый с двумя состояниями) дают всего 8 разных сообщений. Вот эта таблица сочетаний:

| | |
|---|---|
| $A_1(1\ 1\ 1)$, | $A_5(0\ 0\ 0)$, |
| $A_2(1\ 1\ 0)$, | $A_6(0\ 0\ 1)$, |
| $A_3(1\ 0\ 1)$, | $A_7(0\ 1\ 0)$, |
| $A_4(1\ 0\ 0)$, | $A_8(0\ 1\ 1)$. |

Мы видим: трехпараметрическая система передачи и приема информации означает, говоря упрощенно, различение принимающим аппаратом 8 различных сигналов — не больше!

Есть смысл в том, чтобы увидеть отдаленное проявление преимуществ трехпараметричности в трехфазности (трехэтапности) наиболее общих закономерностей в целостных процессах освоения окружающей действительности нервной системой. Таковы, например, циклы в дидактике: частное — общее — частное; эмпирическое — теоретическое — эмпирическое; конкретное — абстрактное — конкретное; пример — задача — пример; тождество — уравнение — неравенство и т. п.

В одном из исследований по психологии мышления перечисляются три последовательных этапа (способа) в общей схеме мышления: «первый способ отражения среды — непосредст-

[1] *Венда В. Ф.* О новой теории обучения//Будущее науки. М., 1983. С. 249.

венный, конкретно-чувственный», «второй способ — поиск связей между различными конкретными явлениями», третий способ интенсифицирует поиск вторичных связей, инвариантов в изучаемых конкретностях и абстракциях; здесь совершается «якобы возврат» к первому способу, но на высшем, обобщенном уровне[1]. Указанным трем фазам переработки информации, как считает автор статьи, соответствуют и три механизма речевого мышления: ассоциативный, корреляционный, грамматический.

В данной связи уместно вспомнить далее и знаменитую формулу В. И. Ленина: «От живого созерцания к абстрактному мышлению и *от него к практике* — таков диалектический путь познания *истины*, познания объективной реальности»[2]. Член-кор. АН СССР А. Н. Яковлев указывает, что умаление роли практики в процессе познания превращает его в искусственную игру ума, приводит к отлету мысли от действительности (Вестник АН СССР, 1987, № 8, с. 66).

Поучительно, что свою знаменитую формулу «товар — деньги — товар» К. Маркс назвал «первой элементарной целостностью экономических категорий»[3].

Допустимо предположить по аналогии, что результативность обучения, скажем, математическим упражнениям также зависит от наличия трехфазности. Принцип триады, несомненно, проявляется и в психической деятельности (и локально, и глобально), и достижение трехфазности в мыслительных процессах может оказаться лучшим решением задачи интенсификации обучения.

Рассмотрим упражнения вида «частное — общее — частное». Пусть вначале учитель пояснил, скажем, переместительный закон для сложения целых чисел (например, $7+2=2+7$). Это, так сказать, исходное, «частное» знание (сложение целых чисел первого десятка).

Рассмотрев с детьми несколько подобных конкретных примеров, учитель далее формулирует общее правило в символической записи: $(a+b=b+a)$.

Тем самым переместительность сложения становится верной уже для любых целых чисел. Итак, при переходе от первой фазы ко второй происходит обобщение знания. Однако дело заключается в том, что мы не должны ограничиваться этим переходом от частного к общему: это лишь начало познания.

Чрезвычайно важно организовать в соответствующем месте как бы возврат мысли учащихся к исходному пункту, дабы, например, проверить, что переместительный закон соблюдается не

[1] См. *Петров В. И.* Эволюция — язык — поэзия//Число и мысль. Вып. 7. М., 1984. С. 56—57.
[2] *Ленин В. И.* Полн. собр. соч. Т. 29. С. 153.
[3] Архив К. Маркса и Ф. Энгельса. 1935. Т. IV. С. 171.

только для целых, но и для дробных чисел: $0{,}7+0{,}2=0{,}2+0{,}7$ (второе частное знание). Этот второй переход от общего знания ($a+b=b+a$) ко второму частному знанию в логике называют конкретизацией.

Философы называют этот второй переход «якобы возвратом» к ранее известному; в результате перехода к конкретным числам достигается третья фаза, аналогичная первой, но она не полностью идентична ей: если на первом этапе конкретности речь шла в нашем примере о сложении целых чисел, то на третьем этапе (опять же конкретном) речь идет о сложении дробных чисел. Разумеется, приведенный пример не более чем схема, модель, поясняющая суть дела.

В некоторых работах по дидактике встречается рекомендация придерживаться в обучении как главной методологической установки двучленной и однопереходной формулы «от общего к частному».

В. И. Ленин писал: «Чтобы понять, нужно эмпирически начать понимание, изучение, от эмпирии подниматься к общему»[1]; «Общее существует лишь в отдельном, через отдельное»[2].

Коль скоро мы ищем рациональную последовательность познавательных категорий в учебном познании, то по меньшей мере представляется сомнительной попытка начинать познание от ... общего: ведь за общее невозможно «ухватиться», минуя отдельное, без и вне частного, особенного. Нельзя перескочить не только через отдельное, но и через конкретное!

Неумеренное поклонение общим категориям в педагогике означает, попросту говоря, переоценку словесных, логических средств познания и недооценку, например, предметных манипуляций, наглядности, интуитивно-образных механизмов мышления.

Раньше школьники в младших классах, осваивая счет в пределах 100, помогали себе вычислениями на русских счетах; в действующих же ныне стабильных учебниках от этого отказались, дети приучаются *сразу же* к словесным правилам. Такой путь иные авторы оправдывают тем, что он якобы ведет кратчайшим путем к истине («от общего к частному»).

В нашей практике обогащение вычислительных операций детей перемещением костяшек счетов — надежная опора мышлению ребенка, ибо подключает двигательные и зрительные механизмы освоения информации.

Поклонение общему как исходному элементу проявляется ныне в педагогике многообразно, как в школе, так и в вузе.

Например, курсы высшей математики часто пишутся в абстрактном ключе, в сплошном поклонении $n$-мерным векторам (матрицам, определителям), не доводимым до конкретных число-

[1] *Ленин В. И.* Полн. собр. соч. Т. 29. С. 187.
[2] Там же. С. 308.

вых характеристик. Студент, витая в сфере абстрактных символов, не может спуститься на почву реальности и конкретности, в частности не привык доводить решение уравнения до чисел, отвыкает от лабораторных работ с измерениями и вычислениями, что особенно недопустимо при профессиональной вузовской подготовке учителей.

А вот пример из современной практики. В 1984 г. были утверждены Минпросом СССР типовые программы для четырехлетней начальной школы; в этих программах в модной погоне за все той же общностью отказались от традиционных названий трех видов задач (увеличение на несколько единиц, уменьшение на несколько единиц, разностное сравнение) и решили ограничиться квазипонятиями, упрощенным пояснением задачи словами «больше — меньше на». Таким образом, вместо трех конкретных разновидностей задач данного цикла, освоенного русской школой еще в XIX в., вводится неопределенный термин «больше — меньше на», который не охватывает главного вида задач на «разностное сравнение» (автор программ — А. М. Пышкало).

Всякая наука есть прежде всего совокупность научных понятий.

Учебный предмет, будучи производным от соответствующей науки, должен содержать тщательно отобранный минимум понятий соответствующей науки. Необоснованное изъятие устоявшихся понятий из математики равносильно разрушению структуры учебного предмета как целостного образования.

Как не может быть химии без понятий «атом», «молекула», «валентность» и т. п., так и не может быть полноценной начальной математики без методически освоенных еще в прошлом веке базисных понятий «разностное сравнение», «кратное сравнение», «взаимно-обратные задачи». А это имеет место, к сожалению, также в программах Минпроса РСФСР 1985 г.

Замена конкретного понятия более общим (в порядке поклонения общему в ущерб частному) приводит в методике к далеко идущим последствиям.

Рассмотрим один пример.

Авторы учебников математики уже в I классе отказались от понятий «множимое» и «множитель», употребляя вместо них общий термин «сомножитель». Однако конкретизация сомножителей в зависимости от их позиции в произведении существенно помогает затем в дифференциации двух видов деления: деления по содержанию и деления на равные части. Рассмотрим этот комплекс знаний:

3 коп. + 3 коп. + 3 коп. + 3 коп. = 12 коп.

3 коп. · 4 = 12 коп.

3 — множимое, 4 — множитель, 12 — произведение.

| *Прямая задача:* | *Обратная задача:* | *Обратная задача:* |
|---|---|---|
| (Умножение. Повторение равных сомножителей) | (Деление по содержанию) | (Деление на равные части) |
| 3, 4, □. | 3, □, 12. | □, 4, 12. |
| Цена тетради 3 коп. Сколько стоят 4 тетради? | На 12 коп. купили тетрадей по 3 коп. за штуку. Сколько купили тетрадей? | На 12 коп. купили 4 одинаковые тетради. Какова цена каждой тетради? |
| *Решение.* | *Решение.* | *Решение.* |
| 3 коп.·4=12 коп. | 12 коп. : 3 коп.=4 (т.) | 12 коп. : 4=3 коп. |

В приведенной стройной последовательности развития знания все на месте; необходимые элементы знания получили свои названия (терминологическое оформление).

«3 коп.» — это *множимое* в умножении, повторяющееся слагаемое:

«3 коп.+3 коп.+3 коп.+3 коп.»=3 коп.·4 =12 коп.

В I обратной задаче *произведение* и *множимое*, будучи известны, порождают деление по содержанию:

12 коп. : 3 коп.=4 (т.).

*Произведение* и *множитель* порождают во II обратной задаче операцию деления на равные части:

12 коп. : 4=3 (коп.) — цена тетради.

Дети рассматривают совместно задачи на умножение и на деление по содержанию.

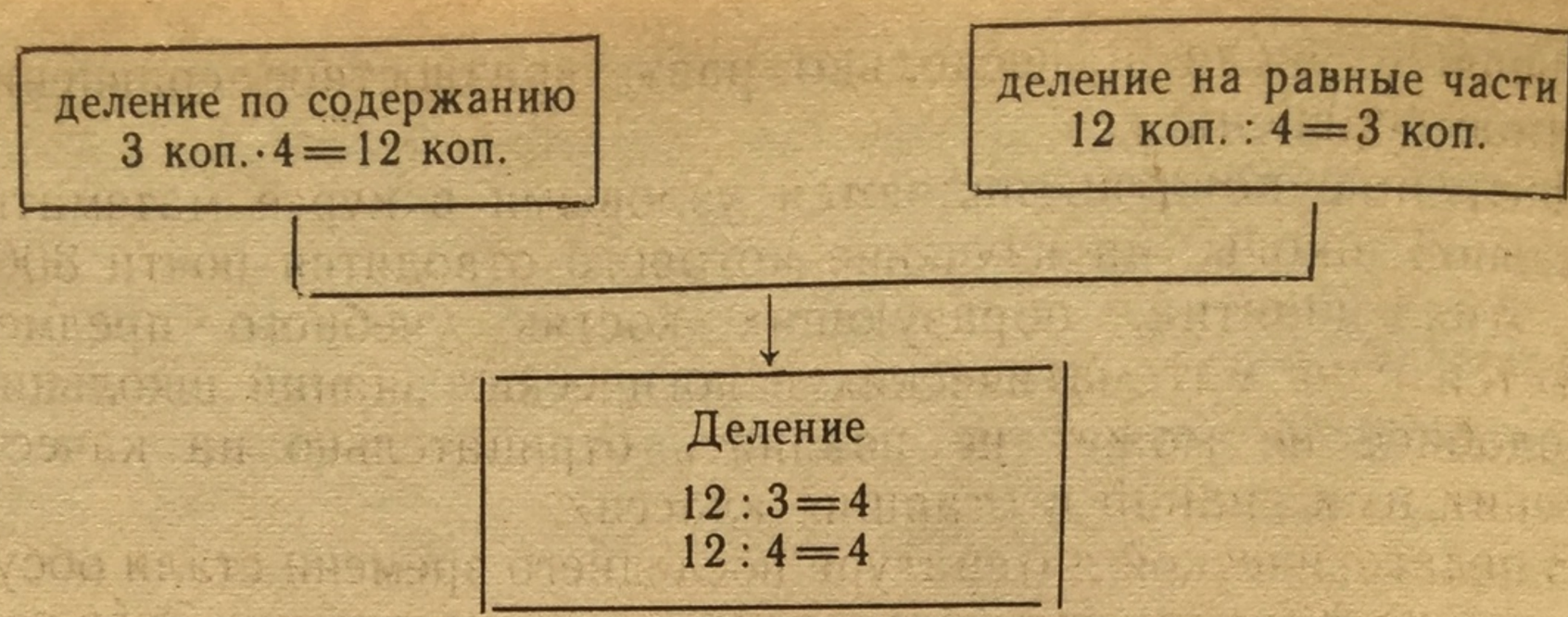
После освоения совместной таблицы умножения и деления

| | |
|---|---|
| 3·1=3 | 3:3=1, |
| 3·2=6, | 6:3=2, |
| 3·4=12, | 12:3=4 и т. д. |

появляется II обратная задача — на деление на равные части. Лишь после всех этих этапов достигается трехэлементный цикл задач и становится возможным решать четверки примеров на умножение и деление.

| | |
|---|---|
| 3·4=12, | 12:3=4, |
| 4·3=12, | 12:4=3. |

В такой естественной системе развития знания постепенно два вида деления заменяются обобщенным понятием, «делением вообще»:




Так понятие «деление» обретает диалектические качества *развивающегося понятия*, свою дихотомичность, т. е. содержательное обогащение понятия[1].

В философии доказано особое значение подобного раздвоения понятия для развития мысли. Столь же фундаментально для физики противопоставление: количество теплоты измеряется в калориях, а степень нагретости (температура) — в градусах.

В начале обучения, когда происходит освоение нового понятия деления (деления как обращенного умножения, как «инобытия» умножения), операция деления истолковывается предельно конкретно: как раздача ученикам стопки тетрадей по 3 каждому (деление по содержанию). Такова стройная методическая система УДЕ изучения раздела «Действия второй ступени».

Как нельзя удалить слова из песни, так и здесь то же: достаточно было раньше времени отказаться от различения множимого и множителя и сразу пользоваться обобщенным понятием «сомножитель», как применение описанной технологии УДЕ для темы «Умножение и деление» немедленно стало затруднительным. Одна неудачная деталь повела к разрушению оптимальной методической системы.

Мы видим, как принцип «от общего к частному» повлиял подспудно и в худшую сторону — на разрешение вполне конкретных вопросов методики изучения умножения — деления в начальной школе. А началось все это с небольшого отхода от традиции, с преждевременной замены двух конкретных понятий «множимое» и «множитель» более общим и менее определенным понятием «сомножитель». А в итоге увлечение общим в ущерб частному привело к не так уж отдаленному следствию: из программы по математике для четырехлетней школы, утвержденной Минпросом РСФСР в 1985 г., вовсе удалены названия пар взаимно-обратных задач: «деление по содержанию» и «деление на равные части»; нет в ней также понятий «увеличение и

[1] В философии доказано особое значение подобного раздвоения понятия для развития мысли. Столь же фундаментально для физики противопоставление: количество теплоты измеряется в калориях, а степень нагретости (температура) — в градусах.

уменьшение числа в несколько раз», «разностное сравнение», «кратное сравнение».

Последние понятия являются узловыми в курсе математики начальной школы, на изучение которого отводится почти 800 ч. Без этих понятий, образующих костяк учебного предмета, сужается круг математических и логических знаний школьника. А подобное не может не повлиять отрицательно на качество усвоения ими знаний в старших классах.

В педагогической литературе последнего времени стали обсуждать также формулу «от абстрактного к конкретному». Этот переход — опять же лишь вторая часть трехфазного перехода «конкретное — абстрактное — конкретное». (Вспомним трехфазную формулу В. И. Ленина: живое созерцание — абстрактное мышление — практика.)

Метод восхождения от абстрактного к конкретному был применен К. Марксом при написании «Капитала». К. Маркс подчеркивал при этом, что восхождение от абстрактного к конкретному использовано им как способ изложения науки политической экономии, как способ упорядочения, осмысления уже собранного материала. Он указывал на противоположность понятий «способ исследования» (сбор материала для науки) и «способ изложения» (науки).

К. Маркс писал: «Конечно, способ изложения не может с формальной стороны не отличаться от способа исследования. Исследование должно детально освоиться с материалом, проанализировать различные формы его развития, проследить их внутреннюю связь. Лишь после того как эта работа закончена, может быть надлежащим образом изображено действительное движение. Раз это удалось и жизнь материала получила свое идеальное отражение, то может показаться, что перед нами априорная конструкция»[1].

Комментируя взаимоотношение противоположных процессов исследования и изложения, академик Б. М. Кедров разъясняет, что нельзя «сводить весь диалектический метод к одному лишь способу изложения результатов науки, способу ее логического построения при всей его важности»[2]. Таким образом, становится понятным, почему нельзя и в методах обучения ограничиваться движением мысли *только* «от абстрактного к конкретному», поскольку процесс обучения не может быть уподоблен лишь одному из этапов познания, в данном случае второму этапу — способу изложения, которому предшествует в реальном процессе познания способ исследования, связанный по логике вещей преимущественно с движением мысли от конкретного к абстрактному.

Для правильного решения методологических вопросов дидакти-

[1] *Маркс К., Энгельс Ф.* Соч. Т. 23. С. 21.
[2] *Кедров Б. М.* Метод Маркса и его роль в логическом построении наук//Вопросы философии. 1983. № 5. С. 48.

ки исключительно важную роль приобретает положение марксизма-ленинизма о спиральном характере познания, предполагающего момент «якобы возврата» к исходному элементу.

Основное положение методологии дидактики: построение процесса обучения должно быть таким, чтобы содействовать становлению элементов диалектического ви́дения мира. В этой связи становится тем более понятным, почему нельзя возводить в ранг якобы новой дидактической закономерности усеченную, неполную, однопереходную и двухфазную часть («от абстрактного к конкретному») действительно сложного, циклического, трехфазного и двухпереходного целостного процесса диалектического познания: «конкретное$_1$ — абстрактное — конкретное$_2$».

В заключение следует сказать об особой эффективности целостного характера познавательных упражнений, установленного нами в ходе длительного экспериментально-теоретического исследования проблемы укрупнения дидактических единиц.

Этот вывод, будучи объективно неизбежным для эффективной практики, осуществляется в многообразных формах. Выше мы имели возможность обсудить психологическую и технологическую стороны укрупнения знаний как методической системы. Однако особо важно понять гносеологическую суть этого нового феномена, а именно появление при этой методической системе «эффекта трехфазных целостностей»: частное — общее — частное; словесное — символическое — словесное; числовое — буквенное — числовое; образное — логическое — образное и т. д. и т. п. (здесь второй переход как бы отрицает первый, будучи возвратом к начальному этапу).

Соответствующие трехфазные упражнения стали у нас главным средством, обеспечивающим высокую эффективность методической системы УДЕ по сравнению с общепринятой системой обучения математике на базе одиночных, неукрупненных, логически мало связанных или вообще не связанных друг с другом упражнений.

Десяток лет назад в организации математического образования господствовало четкое разделение труда: одни авторы писали только теорию (учебники), а другие — задачники. Ныне теория и упражнения излагаются в одних и тех же книгах; так возникли благоприятные условия для целостных трехчленных процессов: задача — теория — задача, тождество — уравнение — задача, составление аналогичной задачи — решение (готовой) задачи — решение задачи из книги, решение задачи — обращение ее — обобщение задачи, теорема — обратная теорема — противоположная теорема и т. п.

К. Маркс объяснил секрет появления прибавочной стоимости в трехчленном цикле «товар — деньги — товар», который был им назван элементарной целостностью экономической жизни общества. В видимом обмене равных стоимостей все же возникла

прибавочная стоимость. Откуда она взялась? «Здесь Родос — здесь и прыгай!» — восклицал К. Маркс. Здесь — парадокс прибавочной стоимости, здесь — противоречие!

Нечто аналогичное мы можем наблюдать и в нашем случае — самовозрастание объема знаний при функционировании системы УДЕ: благодаря трехфазным укрупненным упражнениям учащиеся обретают приращение знаний и алгоритмов, недостижимое при обучении, построенном вне таких циклов упражнений.

Иначе говоря, УДЕ обеспечивает саморазвитие знаний школьника, причем собственно дидактическими средствами. В этом заключается своеобразие укрупнения единиц усвоения как необычного явления автодидактики, вполне диалектического средства освоения знаний.

## § 4. О ПРИНЦИПЕ ИСТОРИЗМА В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

> С чего начинается история, с того же должен начинаться и ход мыслей, и его дальнейшее движение будет представлять собой не что иное, как отражение исторического процесса в абстрактной и теоретически последовательной форме.
>
> *Ф. Энгельс*

Как известно, наша школа постепенно выправляет недостатки в математическом образовании учащихся, возникшие главным образом из-за школьных учебников математики для старших классов, построенных на понятиях теории множеств и математической логики.

Базисные программы по математике для средней школы, составленные сотрудниками АН СССР и АПН СССР, дали верную ориентацию авторам учебников и программ, указав на нецелесообразность построения школьных учебников на абстракциях указанных отраслей математики, оформившихся, кстати, лишь в XIX в.

Возникает вопрос: почему оказалось трудным для понимания школьниками подобное построение математики? Почему нельзя было упредить возникновение неудач, предсказать заранее, что подобный опыт в принципе не может быть удачным?

Ответ на этот вопрос удается найти не на почве логических или психологических соображений, а на основе учета философского аспекта учебного познания.

В последнее время издано несколько вариантов пробных учебников математики (и, к сожалению, не существует ни одного варианта для начальной школы, конкурирующего со стабильными учебниками). В их структуре встречаются случаи, когда авторы

весьма произвольно изменяют традиционную последовательность разделов и параграфов учебного предмета, например: функции рассматриваются до многочленов (учебники алгебры для VI—VII классов); десятичные дроби рассматриваются до обыкновенных дробей (в IV—V классах); векторы рассматриваются до и без координатного толкования (в трехмерном пространстве); проценты вводятся до пропорций; действия над отрицательными числами предшествуют сложению и вычитанию обыкновенных дробей и т. д. и т. п.

Указанные пассажи должны насторожить читателя по двум причинам: 1) они противоречат многократно испытанным добрым традициям нашей школы; 2) во всех указанных случаях нарушаются связи исторического и логического.

В самом деле, структура простейшей линейной функции $y=3x+4$ такова, что в правой ее части записан многочлен первой степени $(3x+4)$. Как можно тогда предпослать понятие функции понятию многочлена? Обыкновенные дроби были изобретены еще до построения египетских пирамид, а десятичные — голландскими купцами лишь в XVI в. Соответственно, понятие «пропорция» возникло задолго до того, как стали пользоваться цифрой нуль, позиционной системой записи чисел и понятием «проценты». Поэтому сомнительно, что в школе можно изучать дроби в обратной последовательности.

Столь же сомнителен должен быть результат бескоординатного обучения векторам, если учесть, что Декарт жил за два века до Гамильтона, что лишь на базе координатного толкования положения точек возникло понятие «вектор».

Как бы ни изощрялись авторы указанных новаций, но исходный методологический просчет — забвение принципа историзма — рано или поздно неизбежно проявляется ухудшением качества знаний школьников.

Уместно здесь вспомнить, что закономерности диалектического материализма имеют силу для всех явлений природы, общества и мышления.

Разумеется, только философские соображения не могут одни «рассудить» конкурирующие частнометодические концепции по тем или иным вопросам. Однако при решении вопросов структуры программ и учебников наиболее общие диалектико-материалистические закономерности должны учитываться наряду с психологической и технологической стороной обучения.

Диалектический материализм исходит из того, что онтогенез знания (развитие индивидуального мышления ребенка) должен в общем и целом повторять этапы филогенеза знания (эволюционное развитие знания в истории всего человечества).

Знаменитый французский математик А. Пуанкаре писал: «...размышлять о том, каким образом лучше всего внедрить новые понятия в девственный ум ребенка,— значит в то же

время размышлять о том, каким образом эти понятия были приобретены нашими предками...»[1].

В общем и целом с того, что было найдено ранее «коллективным субъектом» — всем совокупным человечеством,— как правило, выгодно начинать научение и отдельной личности. (Разумеется, и в этом вопросе нет правила без исключения, но мы здесь обсуждаем явление, слишком уж часто встречающееся в последние годы в современной дидактике. Например, анализируя новую программу по литературе, заведующий кафедрой литературы Ленинградского пединститута им. А. И. Герцена профессор Н. Скатов не соглашается с тем, что в этой программе «Доходное место» Островского изучается перед «Мертвыми душами» Гоголя. При таком антиисторизме, считает рецензент, рвется связь времен, разрушается еще и не сложившееся по-настоящему историческое мышление.)

Забвение философской закономерности о связи исторического и логического может приводить к созданию книг с ошибочной установкой. Рассмотрим подробно один пример.

...Перед нами книга «Математика в картинках» (М., 1985), составленная под руководством заведующей лабораторией начального обучения НИИ школ МП РСФСР, автора стабильных учебников математики для начальной школы кандидата педагогических наук М. И. Моро и рекомендованная Министерством просвещения РСФСР. Авторы, обращаясь к адресату (родителям), пишут: «Книгу нельзя просто прочитать ребенку. Он должен поработать по ней в течение длительного времени, рассматривая вместе с вами картинки, выполняя задания, которые вы ему прочитаете».

Цели понятные и оправданные: пусть, скажем, отец-инженер вместе со своим сыном посмотрит на мир сквозь кристалл математики.

Сделаем небольшой экскурс в область детской литературы.

...Слов нет, дети до 5—6 лет поглощают любую информацию с колоссальной скоростью, но без разбору, как говорится, без селекции. В этом возрасте дети многое воспринимают по первой встрече, нередко на веру, со слов взрослого. Уместно тут вспомнить слова Л. Н. Толстого, указывавшего, что дети до 3 лет усваивают сведений больше, чем за всю остальную жизнь. По современным данным физиологии, воспринятая человеком информация оседает в его памяти навсегда (опыты канадского нейрохирурга Пенфильда). Проблема лишь в проявлении этой информации при работе памяти.

Чтение книги дуэтом (взрослый — ребенок) есть чтение с попутным обсуждением, с «комментариями»; в психологическом плане это есть чтение между строками (причем детьми — в боль-

[1] *Пуанкаре А.* О науке. М., 1983. С. 286.

шей мере, чем взрослыми). Ребенок вместе с увиденным или услышанным из уст родителей запечатлевает с фотографической точностью ассоциации, образы, эмоции и суждения; они — база для подражания, для обобщения. Понятно, что они должны быть отобраны так, чтобы могли помогать растущему человеку верно ориентироваться в безбрежном мире слов и понятий, человеческих поступков и деяний.

Иначе говоря, маленького человека воспитывает зачастую не столько даже текст, напечатанный и написанный, сколько контекст, т. е. то, что он домысливает к услышанному и увиденному на основе своего небольшого жизненного опыта, в котором еще так слаб критический взгляд на события. Отсюда понятно, что всякие ложные или неточные связи мыслей, всякие сомнительные неопределенности, не соответствующие здравому смыслу, могут непоправимым образом захламить кладовые памяти ребенка, исподволь влияя затем неожиданно и коварно в период взрослой жизни при принятии решений, последствия которых могут быть серьезными для него и окружающих.

Надо сказать, что у нас есть у кого учиться в этом непростом деле и кому подражать в лучшем смысле слова: великолепные по форме и содержанию произведения классиков — Толстого, Пушкина, Гайдара, посвященные детям; превосходные сочинения Маршака, Чуковского, Михалкова и многих других. Они поучительны не только по своей здоровой логике, но и своим нравственным подтекстом.

К. Д. Ушинский предъявлял следующие мудрые требования к книгам, написанным для детей: «Не условным звукам только учится ребенок, изучая родной язык, но пьет духовную жизнь и силу из родной груди родного слова... Усваивая родной язык, ребенок усваивает не одни только слова, их сложения и видоизменения, но бесконечное множество понятий, воззрений на предметы, множество мыслей, чувств, художественных образов...»[1].

В последнее время заметно возрастает интерес к проблемам математического образования как самих профессионалов-математиков и преподавателей, так и широких кругов педагогической и родительской общественности.

В свое время профессор И. В. Арнольд писал о том вреде, который приносят установившиеся иногда по случайным причинам способы обозначения и выражения, нередко заимствованные из иностранной литературы, в корне противоречащие духу русского языка и психологии восприятия учащимися основных математических понятий.

В этой связи профессор математики МГУ Ю. И. Манин в книге «Доказуемое и недоказуемое» (М., 1979) также справед-

[1] *Ушинский К. Д.* Избранные произведения. М., 1946. Вып. 1. С. 9—10.

ливо указывает на кочующие по учебникам примеры типа: «если снег черен, то $2 \times 2 = 5$», которые способны лишь дезориентировать, ибо выражения с такой семантикой не реализуются ни в одной подсистеме языка. И действительно, одно время стало увлечением ряда авторов, пишущих для детей, подобное «озадачивание» читателя нелепыми словесными сооружениями, противоречащими ассоциативному строю русского языка и здоровой психике вообще. Приведем несколько примеров.

Н. Я. Виленкин утверждал, что в реальном мышлении может встретиться случай, когда в одном и том же рассуждении пойдет речь о множестве всех комплексных чисел и о множестве... всех китов в океане (?!). Однако же ясно, что засорять сознание такими надуманными конструкциями нельзя, ибо такая фраза никогда не появится при правильном мышлении.

С. И. Шварцбурд и О. С. Ивашев-Мусатов совершенно серьезно «решали» со школьниками следующую задачу: «Если множество $A$ состоит из цифры 4, кота и знака треугольника, а множество $B$ состоит из жука, цифры 7, кота и репы, то их пересечение есть множество, состоящее из одного элемента — кота».

В книге для учащихся А. Д. Кутасова «Элементы математической логики» (М., 1977) понятие «истинность высказываний» объясняется на таких «примерах»: «На Марсе будут обнаружены бактерии в том, и только в том случае, если Елена Водорезова станет олимпийской чемпионкой» (?!); «Если два больше трех, то существуют ведьмы» (?!).

Увы, формализм, создающий почву для последующего абстракционизма, мы находим и в указанной книге «Математика в картинках». В этой книге мы читаем:

> «Будь мне другом,
> Эныk-Беныk,
> дай скакалочки кусок» (*О. Дриз*).

У отца малыша, прочитавшего этот отрывок (имеющего среднее, а то и высшее образование!), возникает непонятное ему (но понятное нам) скрытое недовольство прочитанным: «Зачем же соединять сказочные сюжеты с точной наукой математикой? На это никто еще не шел ни из классиков, ни из современных писателей».

Будем же еще и логичны: можно ли дать «кусок скакалочки»? Зачем же резать ее, т. е. уничтожать вещь? Но дело не только в недопустимости подобных запретных операций. Невозможно дарить кусок (часть) скакалочки, ибо после разрезания на части скакалочка исчезает! Если уж дарить, то обязательно целую вещь.

Подобные фокусы с логикой и грамматикой могут иметь своим дальним следствием умаление конкретных начал мысли, т. е.

обыденной логики, и в итоге — ее отрыв от действительности.

О недопустимости сравнения пудов с аршинами писал В. И. Ленин. Попытка иных «теоретиков» измерить расстояние между звуком и столом была высмеяна еще К. Марксом[1].

Увлечение формализмами в книгах по математике для детей тем опаснее, что они прикрыты для неопытного потребителя книжной продукции видимостью информации. Но в книге для малышей не бывает мелочей: зоркий глаз маленького человека находит пищу своим размышлениям там, где взгляд взрослого проскальзывает мимо.

Поищем все же математику и логику в «Математике в картинках». Приведем одну выдержку, где авторы спрашивают (с. 9): «Кто сидит на самом большом стуле? на самом маленьком? Какого цвета самая большая чашка? самая маленькая?» и т. д.

Нелогичность таких упражнений в том, что авторы употребляют оборот «самая большая», но не используют предшествующее на лестнице сравнения слово «большая».

Эти вопросы неудачны еще и потому, что «самое большое» — это литературный оборот, а не математический. Нет смысла спрашивать о самом большом, если ранее не было выявлено содержание пары собственно математических понятий «больше — меньше», которое, кстати, используется в школе обязательно в числовом, количественном уточнении: больше — меньше на 3 метра (рубля) и т. д. Однако в данной книге мы вовсе не нашли таких упражнений.

На с. 11 авторы предлагают: «Покажи все круги. Покажи на рисунке разные многоугольники». Но слово «разные» опять же не имеет конкретного математического смысла.

А вот и еще: «Раскрась все многоугольники и один самый большой круг» (с. 13). Читателя же просим ответить: если круг — «самый большой», то, очевидно, он один? Зачем же предлагать детям «деревянное дерево»? Такие сочетания запрещены правилами формальной логики.

Математика появляется там, где появляются числа. Числа авторы отнесли на 90-ю страницу книги и дальше, причем во всей книге мы не встретили ни знака «плюс», ни знака «минус» (?!).

Какая же это математика без сложения и вычитания? — законен вопрос читателя. Так мы добрались до главного просчета авторов книги: это вполне сознательно проводимая ими линия «развивать» мышление дошкольника посредством пропедевтики понятий... теории множеств и математической логики, т. е. теоретических абстракций XIX в., возникших, кстати, вне связи с практикой обучения, в недрах «чистой математики».

Авторы книги далее объявляют свои установки следующим

[1] См.: *Маркс К., Энгельс Ф.* Соч. Т. 26. Ч. III. С. 145.

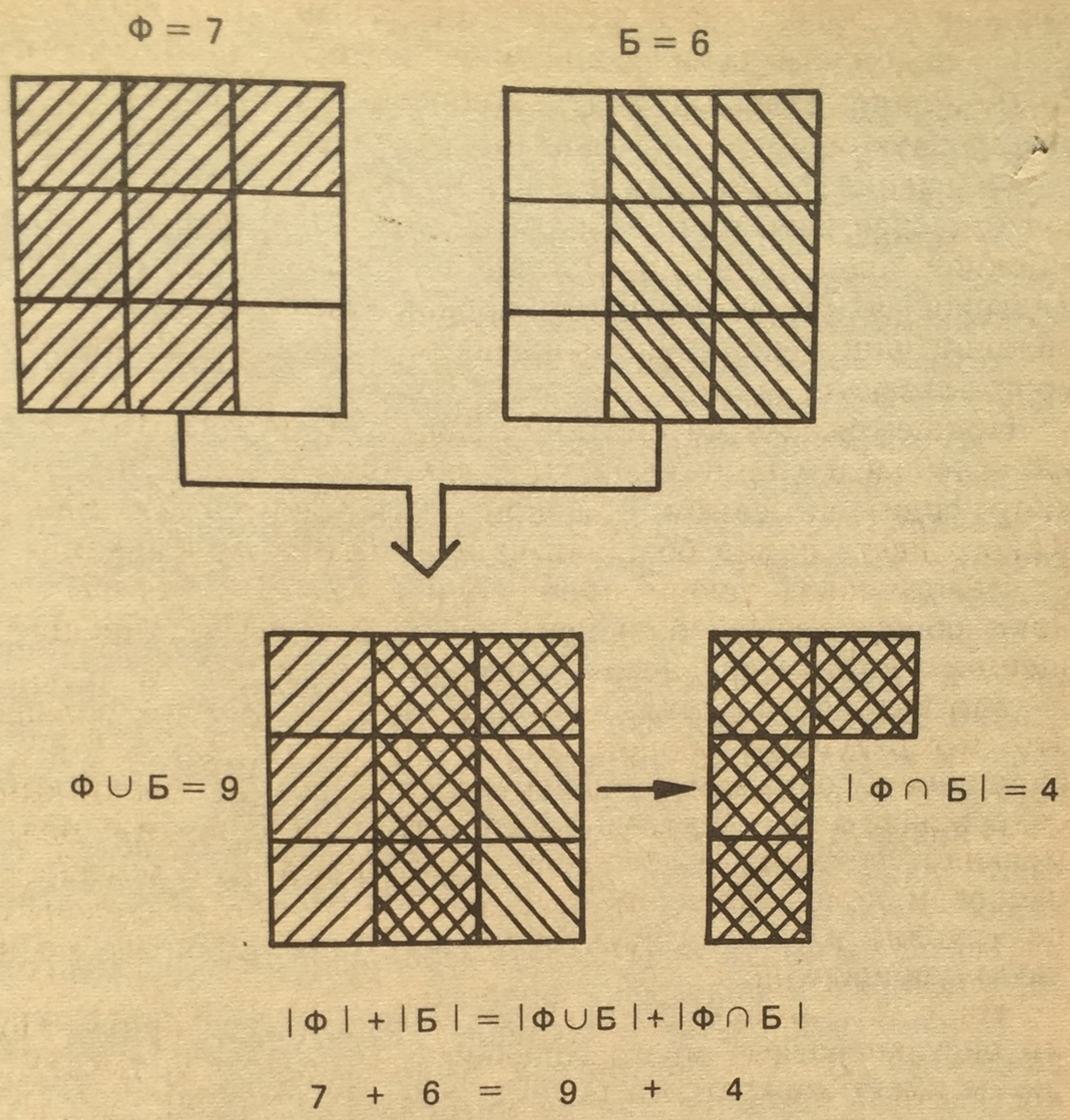



**Рис. 7**

образом: «Будем учить детей объединять две данные группы предметов — это основа для рассмотрения сложения чисел!» (??) Авторов — а они не первые — здесь опять подвел ошибочный лозунг «от общего к частному»! Все здесь поставлено с ног на голову: если объединение множеств как математическая абстракция, как понятие оформилось лишь в XIX в., то сложение чисел освоено человечеством десяток тысяч лет назад, на заре становления «человека разумного».

Выясним, однако, связь понятий объединения и пересечения множеств с арифметическими действиями, их относительную логическую сложность. Рассмотрим следующую задачу (рис. 7): «В звене всего 9 пионеров. (Изобразим это соответственно 9 клетками квадрата.) Каждый пионер увлекается обязательно либо футболом (Ф), либо баскетболом (Б), либо обеими играми Ф∩Б (нет ни одного в звене не играющего в эти игры). 7 пионеров звена играют в футбол, 6 пионеров — в баскетбол. Сколько пионеров играет хотя бы в одну из этих игр Ф∪Б? Сколько пионеров увлекается обоими видами игры в мяч Ф∩Б?»

Когда мы ищем число занимающихся «хотя бы одним видом

спорта», мы ищем множество, которое называется объединением множеств: $Ф \cup Б = 9$.

Когда мы ищем число занимающихся как футболом, так и баскетболом (и тем и другим одновременно), то находим численность пересечения множеств: $Ф \cap Б = 4$.

В теории множеств доказывается достаточно любопытное (весьма непростое для начинающих) соотношение между численностями множеств: $Ф + Б = Ф \cap Б + Ф \cup Б$, $7 + 6 = 9 + 5$.

Авторы указанной книги тщетно пытаются построить математику для шестилетних на абстракциях XIX в.

Рассмотренная выше содержательная числовая интерпретация понятий показывает нам дидактическую недопустимость переворачивания генетической последовательности понятий: смысл объединения выясняется через сложение, но ни в коем случае не наоборот!

Изобретение знаков «плюс» и «минус» сделало понятным суть и связь базисных операций сложения и вычитания, основы науки математики вообще. Перескочить через сложение сразу к объединению множеств так же невозможно, как нельзя передать энергию от холодного тела к горячему.

В книге М. И. Моро, названной «Математика», дети... не считают (даже считалочка без чисел), цифры не пишутся, знаки «плюс — минус» не показываются.

Теперь мы вынуждены сделать небольшой экскурс, как говорится, в историю и философию вопроса.

В известной статье в журнале «Коммунист» (1980. № 14) академика Л. С. Понтрягина было сказано, что чрезмерно абстрактный характер придан преподаванию математики уже в первых классах и уже там мешает освоению ее основного предмета — арифметики.

Первая глава книги М. И. Моро названа необычно: «Один. Все. Некоторые. Каждый».

Один — это неплохо, с него начинается числовой ряд. Но «один» почему-то «спарован» не с числом «два» или словом «много», как должно быть. У автора рядом со словом «один» слово «все» (квантор общности). В речи дошкольника вряд ли можно услышать и слово «некоторые» (квантор существования). А ребенок должен повторять в развитии речи и мышления путь предков своих... Такова диалектика обучения. Нарушение принципа историзма никого не приводило к успеху!

Авторы этой книги, изданной в 1985 г., не только не учли того, что делается сейчас в старших классах, но и «запамятовали» печальный опыт построения учебников математики для начальной школы на идеях... теории множеств, осуществленный 15 лет назад. Авторам и издателям надо было бы учесть отрицательный опыт нашей школы, ибо он дорого обошелся всем.

Однако М. И. Моро продолжает навязывать свою программу: «В дальнейшем в ходе упражнений специальное внимание следует уделить пониманию детьми слов «каждый», «все», «некоторые» и умению правильно их использовать» (с. 21). Итак, по мысли авторов, путь в математику для пятилетних должен идти через... кванторы общности и существования.

Вот встречается в тексте такой пассаж: «У Мухи-Цокотухи много гостей. Всех ли гостей ты знаешь? Покажи и назови некоторых из них. Покажи каждую бабочку» (с. 23). Спрашивается: зачем же М. И. Моро предлагает освоить кванторы дошкольнику, когда математики их дружно не допустили даже в среднюю школу? Не забудем: приведенное выше упражнение предлагается малышу тогда, когда он еще не знает... чисел!

Увлечение кванторами опасно еще и тем, что искусственно уводит воспитателей от необходимости наглядных демонстраций, от наблюдений над первоначальными операциями, моделируемыми через сложение — вычитание (дали — взяли, улетели — прилетели и т. д.).

Математику на дошкольном уровне нельзя заменять «игрой в математику», одевать сюжеты в форму надуманных сказок. Математика — дело серьезное для любого возраста. Уместно здесь вспомнить слова академика П. Л. Капицы: «Для того чтобы написать популярную книгу, надо исключительно хорошо знать, о чем пишешь... Наука не нуждается в раскрашивании беллетристикой. Она интересна сама по себе».

Неудачу в перестройке школьного математического образования на базе теоретико-множественных представлений академик В. А. Амбарцумян резюмировал так: «Стремление насытить школьные учебники математики представлениями и понятиями, относящимися к проблеме глубокого обоснования этой науки, нанесло огромный ущерб нашей школе»[1].

Объединение и пересечение, кванторы общности («все») и существования («некоторые») суть формальные конструкции, созданные математиками для внутренних ее потребностей, как аппарат для строгого изложения результатов науки, добытых в ее истории иными средствами.

Поистине примечательно, что, потерпев неудачу в IV—X классах, иные сторонники «модных кванторов» ныне устремились в беззащитную пока сферу... дошкольного образования!

Авторы рассматриваемой книги идут настойчиво много лет против технологии укрупнения знаний, против ознакомления, скажем, с простейшим и понятным детям преобразованием сложения в вычитание ($3+2=5$, откуда $5-2=3$), а также против составления задач. Много лет они не пускают эти приемы в начальную школу (даже после одобрения их в АПН СССР и

[1] Коммунист. 1980. № 1. С. 119.

НИИ школ РСФСР), на страницы своих стабильных учебников; нет их, конечно, и в данной книге для шестилетних.

В связи с обсуждаемым вопросом нельзя не выразить озабоченности тем, что до сих пор в педучилищах и на факультетах вузов, готовящих воспитателей детского сада и учителей начальных классов, математика изучается по пособиям, построенным полностью на идеях теории множеств и математической логики, хотя эти позиции были отвергнуты базисными программами АН СССР и АПН СССР.

Поистине «ложные идеи способны исказить поле сознания, стихийная цепная реакция их — породить ложные тенденции в нашей жизни. А это уже не может не тревожить»[1].

При решении вопросов обучения математике актуальным остается всегда двойственная природа процесса обучения, который есть *диалог учителя и школьника*.

Школьник должен овладеть определенным программным минимумом знаний; учитель добивается этого посредством конкретных приемов и средств обучения, т. е. методикой обучения. В обучении оба элемента (содержание и процесс — методика), конечно, важны и нужны. Однако для судеб школы небезразлично, чему отдавать приоритет.

Отнюдь не случаен в дидактике афоризм: не столь важно то, чему учат, сколько важно то, как учат. В газете «Известия» (1986. 18 марта) высказывалось справедливое утверждение, что за счет усовершенствования программ начальной школы возможно разгрузить старшие классы и найти столь нужные учебные часы для информатики и литературы. Автор данной статьи предлагал, однако, добиться этого введением изучения отрицательных чисел в начальной школе. Предлагаемая мера, разумеется, не может быть эффективной, поскольку в этом случае опять же нарушается принцип историзма. Нас здесь должно насторожить то, что в начальной школе еще не изучены действия над дробными числами, а мы предлагаем школьникам действия с отрицательными числами. Несложно, конечно, выучить со школьниками правило умножения отрицательных чисел: «минус» на «минус» — получится «плюс», $(-2)\cdot(-3)=6$. Но разве только в этом дело?

Новое математическое понятие лишь тогда начинает «работать» в структуре знания и приносить приращение мышлению, когда оно позволяет решать содержательные задачи, доступные пониманию школьника данного возраста.

Изучение отрицательных чисел до начал алгебры совершенно не оправдано дидактически. Уместно привести здесь суждение известного математика-педагога М. Клайна: «И если нужны были 1000 лет, чтобы первоклассные математики добрались до понятия отрицательных чисел (читай: после освоения дробных чисел.—

[1] *Понтрягин Л.* Коммунист. 1980. № 14. С. 102.

*П.Э., Б.Э.*), и потребовалось еще 1000 лет, чтобы математики признали отрицательные числа, то можно быть уверенным, что учащиеся испытают затруднения с отрицательными числами.

Больше того, учащимся придется преодолеть эти трудности почти тем же путем, каким это проделали математики, постепенно привыкая к новым понятиям, оперируя с ними и используя все интуитивные средства, которые учитель сможет им привести»[1].

Надо сказать, что в настоящее время действительно существуют значительные возможности разгрузки старших классов путем достижения полноты знаний систем задач; так, наш многолетний опыт говорит о полной возможности и целесообразности изучения в четырехлетней начальной школе десятичных мер, задач на проценты, объема, основных построений с циркулем и линейкой и др. Но все это относится к той части программы, которая называется «что изучать?». Дидактические споры, к сожалению, обычно не идут дальше обсуждения содержания предмета (что изучать?). Между тем главный резерв усовершенствования математического образования в начальной школе находится в сфере методики (как обучать?), а именно: сквозной линией через все учебники начальной школы должна пройти система упражнений, построенных на идеях противопоставления, составления задач, в том числе взаимно-обратных. Эти методические подходы, имея прочную опору в закономерностях психофизиологии, содействуют достижению полноты знаний; алгоритмы переработки знаний, создаваемые на базе этих подходов к упражнениям, обеспечивают существенную экономию времени усвоения математики и в старших классах.

Нам не приходилось встречать в печати ни одного сообщения учителей о какой-либо неудаче в реализации указанных трех тезисов (противопоставление, обращение и составление задач). И тем более парадоксально, что в программах 1985 г. для четырехлетней школы опустили все эти понятия (данный вопрос мы обсудим подробно в последующем изложении).

## § 5. О ВЗАИМОСВЯЗИ СОЗНАНИЯ И ПОДСОЗНАНИЯ В АКТУАЛИЗАЦИИ УКРУПНЕННЫХ ЗНАНИЙ

Методическая система УДЕ обрела сейчас свою хронологию и литературу. Авторов данной книги поддерживает то обстоятельство, что в их переписке появляются имена все новых учителей, успешно использующих на своих уроках фрагменты целостной методической системы УДЕ. Такие сообщения нами были по-

[1] *Клайн М.* Логика против педагогики//Математика: Сб. научно-методических статей. М., 1973. С. 51.

лучены из разных областей от 20 учителей, получивших премии АПН СССР в 1987 г.

Однако, как бы ни умножалось количество позитивных факторов, подтверждающих методическую идею, она рискует остаться на уровне всего лишь «обобщения передового опыта», если не будут выявлены глубинные психологические причины феномена УДЕ. Но коль скоро такие психологические причины обнаружены, эффект, приносимый методической системой УДЕ, перестает быть случайностью, а все более укрепляется в роли новой методико-дидактической закономерности.

Особенности проявления укрупненного знания, по-видимому, невозможно объяснить исчерпывающим образом, если не обратиться к современным исследованиям о взаимосвязи в процессах мышления сознания и подсознания.

Послушаем вначале мнение самих ученых о роли подсознательного фактора в их мышлении. Математик А. Пуанкаре писал: «...представляется правдоподобной такая гипотеза: «я» подсознательное нисколько не «ниже», чем «я» сознательное; оно отнюдь не имеет исключительно механического характера, но способно к распознаванию, обладает тактом, чувством изящного; оно умеет выбирать и отгадывать. Да что там!

Оно лучше умеет отгадывать, чем «я» сознательное, ибо ему удается то, перед чем другое «я» оказыается бессильным. Одним словом, не является ли подсознательное «я» чем-то высшим, чем «я» сознательное?»[1].

Физик-теоретик академик А. Мигдал вторит Пуанкаре: «Есть удивительная область человеческой психики — подсознание. Здесь хранится накопленный опыт, опыт не только одного человека, но многих поколений, здесь рождается интуиция... Это «нижний этаж» обычного человеческого сознания; на верхнем этаже рождаются слова, понятия, на «нижнем» — образы. И бывает, что образ подсказывает решение!»[2].

Психологическая жизнь человека складыается пестро из сознательного и бессознательного, отмечал И. П. Павлов. Подсознательная переработка информации имеет четкие проявления всюду, когда психологи ведут речь о «граничном мышлении», «видении около», информационном «фоне», «топологии слова (понятия)», подтексте, предречевом мышлении, фреймах и т. п.

АН СССР присудила в 1985 г. премию им. И. П. Павлова профессору Э. А. Костандову за книгу «Функциональная асимметрия полушарий мозга и неосознаваемое восприятие» (М., 1983). Им доказана возможность выработки прочной временно́й связи между двумя неосознаваемыми раздражителями при

[1] *Пуанкаре А.* О науке. М., 1983. С. 317.
[2] *Мигдал А.* Как рождаются физические теории. М., 1984. С. 22.

условии, если второй раздражитель в сочетаемой паре — эмоционально значимое слово.

Активизация познавательной сферы зависит от мыслей и чувств, мотивов и потребностей, от всей психической жизни человека. Сознанию доступна лишь небольшая часть информации, хранящейся и обрабатываемой в нервной системе.

Поучительно учесть, что в философском исследовании по трансформационной логике отмечаются особенности информации контекста и подтекста, для выявления в высказываниях неявного, скрытого, неочевидного и имплицитного смысла (Г. А. Брутян).

При обучении посредством УДЕ увеличивается как число понятий, вошедших в данную смысловую единицу, так и число связей между понятиями. Надо учитывать, что число связей между элементами системы пропорционально квадрату числа элементов. Если, скажем, ранее отдельно существовавшие в сознании две задачи (теоремы) соединились в одну крупную мысль, то можно утверждать, что число связей между словами и суждениями в пределах новой укрупненной единицы увеличилось в 4 раза!

Что же понимается под сознательным и подсознательным в современной психофизиологии?

Член-корреспондент АН СССР П. В. Симонов пишет: «Если человек перечисляет детали предъявленной ему сюжетной картины, а спустя некоторое время называет фрагменты, отсутствующие в первом отчете, мы имеем все основания говорить о наличии неосознаваемого восприятия и непроизвольной памяти, т. е. о следах, лишь позднее проникающих в сферу сознания»[1].

Иначе говоря, информация, не получившая вначале словесного оформления, может лишь с запозданием обрести такую форму. Подспудная информация, пусть и не получившая еще словесного, грамматического, логического оформления, есть все же реальность деятельности мозга, так сказать, «мысль в потенции», в возможности отсроченного проявления. Информация, не осознаваемая сейчас, может перейти (перекодироваться) в сферу сознания через определенное время, при возникновении соответствующей ситуации в мыслительной деятельности.

Многочисленные научные результаты говорят о том, что диалог сознательного и подсознательного реализуется в теснейшей связи с функционированием асимметрии человеческого мозга, хотя понятие «сознательное» отнюдь не перекрывается понятием «речевое» (поскольку оно функционирует и у глухонемого). Тем не менее полагают, что подсознательное больше тяготеет к правому, «образному», полушарию, а сознательное — к левому, «речевому».

[1] *Симонов П. В.* Неосознаваемое психическое: подсознание и сверхсознание//Природа. 1983. № 3. С. 24.

Известно афористическое суждение Паска: «Понимание есть разговор двух кодов в пределах одной головы». В этом смысле всякий процесс обобщения или конкретизации информации посредством перевода из одного кода в другой благоприятствует процессу понимания.

В контексте нашей темы возникновение укрупненной единицы знаний в психологическом плане имеет отношение прежде всего к возникновению переходных связей между сознательными и подсознательными компонентами одного и того же знания, между разными фазами созревания той или иной мысли. Например, центральный пункт укрупнения дидактических единиц — это совместное изучение взаимно-обратных действий. (Объяснение на одном уроке, изложение на одной странице учебника.)

Начальная школа освоила ныне укрупненную структуру «действий первой ступени»: сложение и вычитание образовали в учебниках единую тему (точно так же как умножение и деление), хотя не так давно арифметические действия изучались в четырех отдельных главах. Это завоевание методики — очевидный факт внедрения УДЕ в обучение.

Пусть первоклассник присчитыванием по единице получил результат:

$$5+2=(5+1)+1=6+1=7.$$

Учителям известно, что осуществление обратного действия — вычитания с теми же числами — вначале требует снова подробных манипуляций на счетном материале (отсчитывание по единице):

$$7-2=(7-1)-1=6-1=5.$$

Но вот наступает момент, когда становится возможной быстрая свернутая актуализация обращения: «к шести прибавить три — получится девять: значит, 9 без трех — будет 6» ($6+3=9$, значит, $9-3=6$).

В опыте испытания наших учебников, построенных на идее укрупнения, было найдено, что после решения исходного примера ($6+3=9$) решение примера-следствия ($9-3=6$) у школьника осуществляется в несколько раз быстрее, чем решение исходного. В чем причина? Причина в том, что при таком усложнении (укрупнении) задания расширяется поле проявления подсознательных механизмов.

Пусть у ученика актуализированы названия чисел при сложении: 6 и 3 — слагаемые, 9 — сумма. Предположим, что решение примера-следствия ($9-3=6$) совершается каждый раз на основе подробного проявления в сознании следующего логического правила: «Если от суммы (9) вычесть одно слагаемое (3), то получится другое слагаемое ($9-3=6$)».

Однако, как показывают наши наблюдения, в условиях обучения посредством УДЕ к концу первого полугодия в I классе переход от исходного примера ($6+3=9$) к примеру-следст-

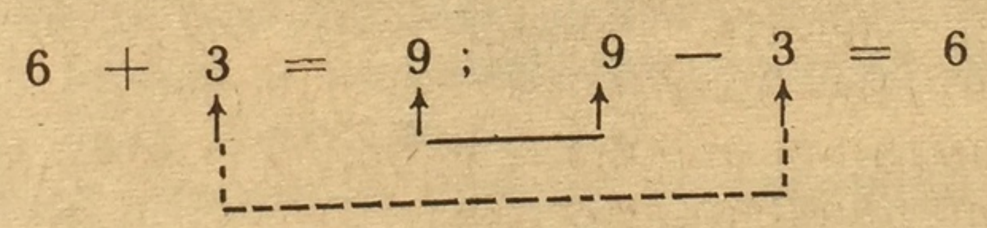
вию (9—3=6) осуществляется уже на основе подсознательных ассоциаций, без проговаривания логических правил, как бы одновременно с решением исходного примера (6+3). В основе таких свернутых рассуждений оказывается неосознаваемый алгоритм, связанный с фиксацией зрением изменения пространственного расположения символов (для удобства обсуждения запишем примеры один под другим):

| I | II | III | IV | V |
|---|---|---|---|---|
| 6 | + | 3 | = | 9 |
| 9 | — | 3 | = | 6 |

Перекодировка первого примера (на сложение) во второй (на вычитание), по-видимому, совершается опять же при посредстве подсознательных (не логических!) процессов и сводится к уяснению позиций элементов в исходном и преобразованном знаниях; вот эти ассоциативные связи: элементы III и IV остаются на своих местах (3=); элементы I и V меняются местами; во II позиции знак «плюс» (+) заменяется на знак «минус» (—) и т. п.

Заметим, что учитель никогда не объясняет способ преобразования сложения (6+3=9) в вычитание (9—3=6) в форме таких упрощенных «машинных команд»; тем не менее в мышлении ученика срабатывает алгоритм такого перехода. Вопрос лишь в том, как возникает самопроизвольно такой алгоритм, поскольку он не был объяснен учителем.

В самом деле, объясняя преобразование сложения в вычитание, учитель обычно пользуется математическими понятиями: «Сумма 9 в примере на сложение становится уменьшаемым в примере на вычитание, а слагаемое 3 — вычитаемым во втором примере»:




На данном простейшем примере мы видим две картины, два плана возникновения УДЕ: логический (сознательный) и информационный (подсознательный). Оба этих плана — сознательный и подсознательный — всегда имеют место, как только мы обучаем посредством УДЕ в любом классе школы.

Итак, благодаря УДЕ возникает широкое поле для функционирования подсознательной информации. При построении же обучения преимущественно на базе одинарных суждений, отдельных равенств и т. п., не соединяемых тут же, сейчас же в более крупные правила (в цепь равенств и т. п.), тормозится развитие мышления, поскольку перегружается сфера сознательного из-за недогрузки сферы подсознательного.

Процесс обучения всегда сопровождается возникновением

ситуаций, которые необъяснимы в словах, но тем не менее воспринимаются мозгом. (Предельный случай — обучение слепоглухонемых.)

Применение методической системы УДЕ расширяет сферу логически оформленных мыслей, но в еще большей мере — сферу неосознаваемого в недрах подсознания.

Испытания учебников, построенных на идее укрупнения, показали исключительную эффективность такого технологического приема, когда вместо того или иного равенства предлагаются различные деформированные задачи с пропущенными элементами, например:

$$\square + 7 = 10,$$
$$25{,}6 : \square = 0{,}256.$$

Подобные задания вызывают поистине взрыв мыслительной активности по сравнению с обычными, недеформированными заданиями, предлагаемыми сотнями в учебниках: $3 + 7$; $25{,}6 : 100$ и т. п. (условие задачи в левой части полностью известно; правая часть неизвестна).

Объяснение явления резкого ускорения мыслительных процессов благодаря деформации структуры обычных заданий мы опять же находим в том, что здесь участвуют подсознательные механизмы.

Пусть речь идет о решении деформированного задания

$$\square + 3 = 10.$$

Первоклассник, отгадывающий этот «пример-ребус», перебирает, видимо, несколько вариантов восстановления пропущенных чисел, пока не остановится на нужном варианте:

$$1 + 3 = 4,$$
$$4 + 3 = 7,$$
$$5 + 3 = 8,$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$7 + 3 = 10\ (!)$$

Названия чисел и начертания символов испытываемых чисел, по-видимому, не проникают в сферу сознания, пока не будет найден правильный ответ, который наконец фиксируется и произносится: «семь да три — будет десять» (найденное в уме совпало с правой частью равенства).

Важно еще раз отметить, что в специальном решении коллегии Минпроса РСФСР от 14 VII 1984 г. было рекомендовано увеличить число деформированных упражнений на уроках математики в начальной школе. Но вот что удивительно: главный методист того же министерства О. Г. Абрамова, составляя ежегодно для учителей образцы контрольных работ в начальной школе, ни разу не включила ни одного деформированного

примера в эти тексты. Велико же желание иных не допустить УДЕ в реальную практику школ!

Основной нерв процесса укрупнения знаний — образование крупной единицы знания на основе соединения в единое целое раздельно существовавших, более мелких элементарных единиц (знаний). В этом процессе главное — переход от одного элементарного знания к другому, например от сложения к вычитанию (и обратно), от интеграла к дифференциалу (и обратно) и т. п.

В технологии укрупнения знаний занимают центральное место именно переходы от одного понятия ко взаимосвязанным понятиям: «Мише подарили сначала 3 яблока, потом 2 яблока. Сколько у него стало яблок?» ($3+2=5$).

После решения этой задачи, согласно стабильным учебникам, принято решать опять задачу того же рода, т. е. на сложение (например: 4 коп. $+2$ коп. $=6$ коп. и т. д.).

Этот момент — характерная особенность общепринятой методики, когда стало правилом посвящать целый урок (а в книге целую главу) изложению сведений, относящихся только к одной из полярных частей двуединого знания (умножение без деления, прямая теорема без формулирования обратной теоремы и т. п.).

В системе же наших учебников математики учитель, напротив, не расстается с рассмотренной задачей, а вместе с учащимися превращает ее в «сверхзадачу-триаду». Так, сразу же за рассмотренной задачей составляется задача-следствие в виде второй задачи: «Мише подарили сначала несколько яблок, а потом 3 яблока. Всего у него стало 5 яблок. Сколько яблок дали ему сначала?» ($5-3=2$). (В третьей же задаче требуется найти число 3.)

Уметь составить на основе прямой задачи обратную — это для ученика истинное волшебство, удивительный алгоритм проникновения в связь вещей и явлений, постижения тем самым ранее неизвестного на базе известного.

Опыт обучения учащихся приему составления обратной задачи показывает, что сначала этот процесс вызывает у учащегося значительные трудности. В самом деле, мыслить число 3 в исходной задаче как известное число, а в обратной задаче то же самое число как искомое (неизвестное) — это непростая и чрезвычайно полезная нагрузка для психики растущего человека, вводящая его в диалектику мысли.

Поэтому в самом начале обучения по новой системе алгоритм укрупнения (превращение прямой задачи в обратную) требует от учителя многократного повторения. Однако, будучи усвоен и понят, этот прием далее осуществляется автоматически — преобразование прямой задачи в обратную уже не требует усилий мысли и осуществляется как само собой разумеющееся: прямая и обратная задачи поистине сливаются воедино, достигая в дидактическом плане одного уровня трудности.

Иначе говоря, то, что вначале совершалось при активном контроле сознания, теперь выполняется в сфере подсознания. Это и ускоряет усвоение соответствующего материала.

Сравним символическую запись прямой и обратной задач.

*Исходная задача:*

3, 2, □.

Мише дали сначала 3 яблока, потом 2. Сколько ему дали всего яблок?

*Обратная задача:*

□, 2, 5.

Мише дали сначала несколько яблок, потом 2. Всего ему дали 5 яблок. Сколько яблок дали ему сначала?

Процесс решения готовой задачи значительно проще, чем процесс преобразования одной задачи в другую, т. е. процесс *создания школьником новой задачи* (пусть и на базе известных чисел, известного сюжета).

Хронометраж решения прямой задачи и немедленно за ней предлагаемой обратной задачи показывает, что на второй процесс тратится времени на порядок меньше (в несколько раз). Этим объясняется суммарное сокращение расхода времени при системе УДЕ (на 14—20% против годовых норм).

Если попытаться представить алгоритм преобразования прямой задачи в обратную, то он выглядит примерно так:

1) Напиши рядом числа, имеющиеся в условии решенной задачи:

3; 2; □.

2) Напиши после них число, найденное в ответе данной задачи:

3; 2; 5.

3) Замени пустой клеткой одно из чисел, данных в условии задачи:

□; 2; 5.

4) Составь по каждому числу предложение с этим числом.

5) Предложение, соответствующее пустой клетке, должно содержать слово «несколько».

6) Вопрос задачи должен соответствовать клетке и т. д.

Мы видим, что логическое описание процесса преобразования задачи — достаточно длинная последовательность предписаний. И потому, видно, иные учителя избегают пользоваться этим методом. Однако при соответствующих условиях указанные преобразования информации совершаются учеником одномоментно, и это становится возможным благодаря разумному использованию оперативной памяти и подсознания.

...Увидев в небе след пролетевшего лайнера, мы долго любуемся постепенно расширяющейся белой полосой. Физика этого явления проста: каждая молекула горячего газа, вырвав-

шегося из сопла двигателя, рождает вокруг себя в холодной атмосфере мириады капелек водяного пара.

Допустима некоторая аналогия между описанным физическим явлением и восприятием информации мыслящим мозгом. Услышанное нами слово возбуждает в мыслящем мозге раскидистое дерево формальных и содержательных ассоциаций, подобно тому как вокруг камня, упавшего в воду, распространяются кругами волны во все стороны. Лишь некоторые результаты процесса переработки информации по иерархии кодов выходят на уровень сознания, уровень слова и логики, становясь объектом коммуникации в произнесенном или записанном. Слово — сказанное или задуманное — подобно надводной части айсберга: оно возбуждает цепи образов и мыслей, бóльшая часть из которых актуализируется в недрах неосознаваемого подтекста данного сообщения.

Для методической системы укрупнения знаний характерны непрерывные переходы между парами понятий разного качества: число и точка; уравнение и линия; решение системы — пересечение прямых и т. п. К сожалению, в сложившейся ныне структуре уроков математики безраздельно господствует аналитизм, когда различные формы одного знания изучаются изолированно и порознь, через месяцы и даже годы одно после другого и излагаются нередко в различных учебных предметах.

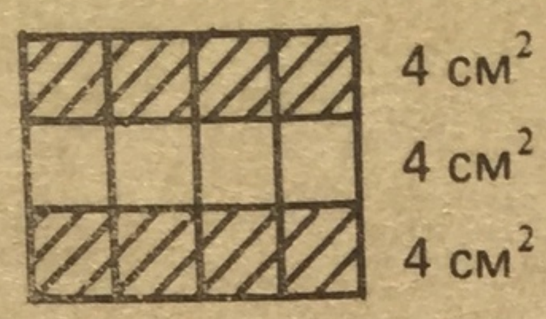
Учебная информация, усваиваемая школьниками,— чрезвычайно сложное образование, зависящее не только от характера изложения вопроса в изучаемой главе, но и от того, что предшествовало ей и что будет следовать за ней в учебнике, во всей системе уроков.

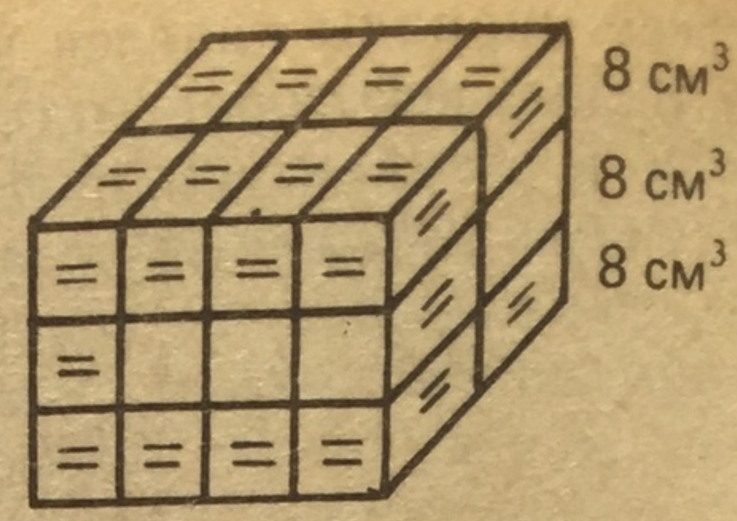
Говоря по-другому, львиная доля учебной информации — это структурная информация (информация связи), или информация контекста и подтекста. И постигается она путями, которые невозможно выразить средствами формальной логики.

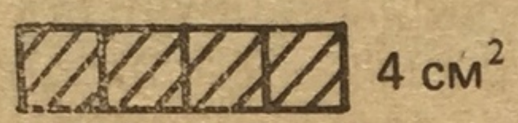
Укрупнение знаний содействует реализации резервных механизмов мышления, в данном случае связей между сознательным и подсознательным. Правильный учет взаимодополнительности осознаваемого и неосознаваемого (сознательного и подсознательного) может привести к переоценке ценностей, к созданию, скажем, интегрированного (единого) курса математики, изучаемого с самых младших классов.

В связи с этим интересно психологическое понятие «фрейм». Фрейм охватывает весь сценарий обсуждения какой-либо темы на одном отрезке времени (например, на одном уроке), включая в него доказанное и недоказанное, наличное и возможное, короче говоря, логику и психологию развивающегося знания. (Понятие «фрейм» выдвинуто психологом М. Минским. Дословно — «рамка».)

Рассмотрение данного вопроса придется начать издалека.



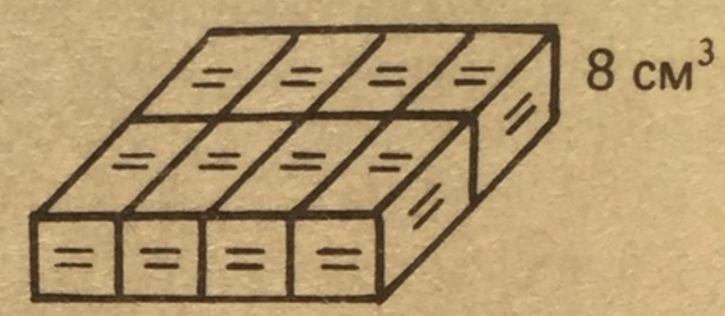




$4 + 4 + 4 = 12$

$4 \cdot 3 = 12$

$S = a \cdot b$




$4 \cdot 2 = 8$

$4 \cdot 2 = 8$

$4 \cdot 2 = 8$

$8 \cdot 3 = 24$

$(4 \cdot 2) \cdot 3 = 24$

$V = a \cdot b \cdot c$

Рис. 8

По действующим учебникам и программам площадь прямоугольника изучается в III классе, а объем прямоугольного параллелепипеда — через... 2 года! Однако же ничто не мешает нам разъяснить сразу двуединое правило, чрезвычайно ценное по своим последствиям для развития практического мышления детей, например: чтобы найти $\frac{\text{площадь квадрата}}{\text{объем куба}}$, достаточно перемножить саму(о) на себя его $\frac{\text{сторону 2}}{\text{ребро 3}}$ раза (рис. 8).

Укрупненное нами так содержание достигается соответствующей методикой объяснения, логическим стержнем которого выступает аналогия фактов, устанавливаемых прямым наблюдением над соответствующими моделями и рисунками:

**Прямоугольник — это четырехугольник, у которого все углы между сторонами прямые. У прямоугольника («рамки») противоположные стороны равны.**

**Прямоугольный параллелепипед — это шестигранник, у которого все углы между ребрами прямые. У прямоугольного параллелепипеда («ящика») противоположные ребра равны, противоположные грани равны.**

(Если фигуры совпадают при наложении всеми своими частями, то они называются равными.)

Правила определения $\frac{\text{площади («рамки»)}}{\text{объема («ящика»)}}$ устанавливаются также аналогичными суждениями, но обязательно на одном уроке, посредством сравнения плоской и пространственной фигуры:

В прямоугольнике имеются три равных ряда клеток. В каждом ряду по 4 клетки. Сколько всего клеток в нем?

$$4 \cdot 3 = 12.$$

Чтобы найти площадь прямоугольника, надо перемножить длину и ширину:

$S = 4 \cdot 3 = 12,$

$S = a \cdot b,$

$S = 4 \cdot 3 = 12$ (см$^2$).

В параллелепипеде имеются три равных слоя. В каждом слое по $4 \cdot 2 = 8$ кубиков. Сколько всего кубиков в нем?

$$8 \cdot 3 = 24,$$
$$2 \cdot 4 \cdot 3 = 24.$$

Чтобы найти объем параллелепипеда, надо перемножить длину, ширину и высоту:

$$V = 2 \cdot 4 \cdot 3 = 24,$$
$$V = a \cdot b \cdot c,$$
$$V = 2 \cdot 4 \cdot 3 = 24 \text{ (см}^3\text{)}.$$

Правила оформляются одновременно на нескольких кодах: числовом, буквенном, словесном. Простейшие формулы должны вводиться уже в I классе.

Вопрос о месте подсознательного в психических процессах стал исследоваться научными методами лишь в последние десятилетия.

Правильная оценка роли подсознательного в обучении математике имеет прямое отношение к следующей проблеме: какие математические понятия и суждения возможно *предлагать без логического доказательства* и на какой ступени обучения?

Отметим, что академик Л. Соболев указывал на целесообразность ознакомления учащихся с некоторыми суждениями математики без доказательства (но специально предупреждая их, конечно, что эти суждения даны пока без доказательства).

Уже дошкольник овладевает громадным объемом слов и знаний, грамматикой речи и правилами поведения без... логически оформленных доказательств. Больше того, в исследованиях по истории математики установлено, что в древнейших цивилизациях Востока и Египта почти не было логических доказательств, хотя многие математические истины там были открыты задолго до расцвета греческой математики.

Например, доказательство теоремы Пифагора предлагалось индийскими математиками в виде рисунка и сопровождалось командой: «Смотри!» (рис. 9 на с. 66).

Логические стандарты определений, доказательств, аксиом современной математики возникли в Древней Греции и нашли оформление в геометрии Евклида и теории силлогизмов Аристотеля. Но нельзя забывать того, что указанные ученые творили в рабовладельческом государстве, где считалось правилом

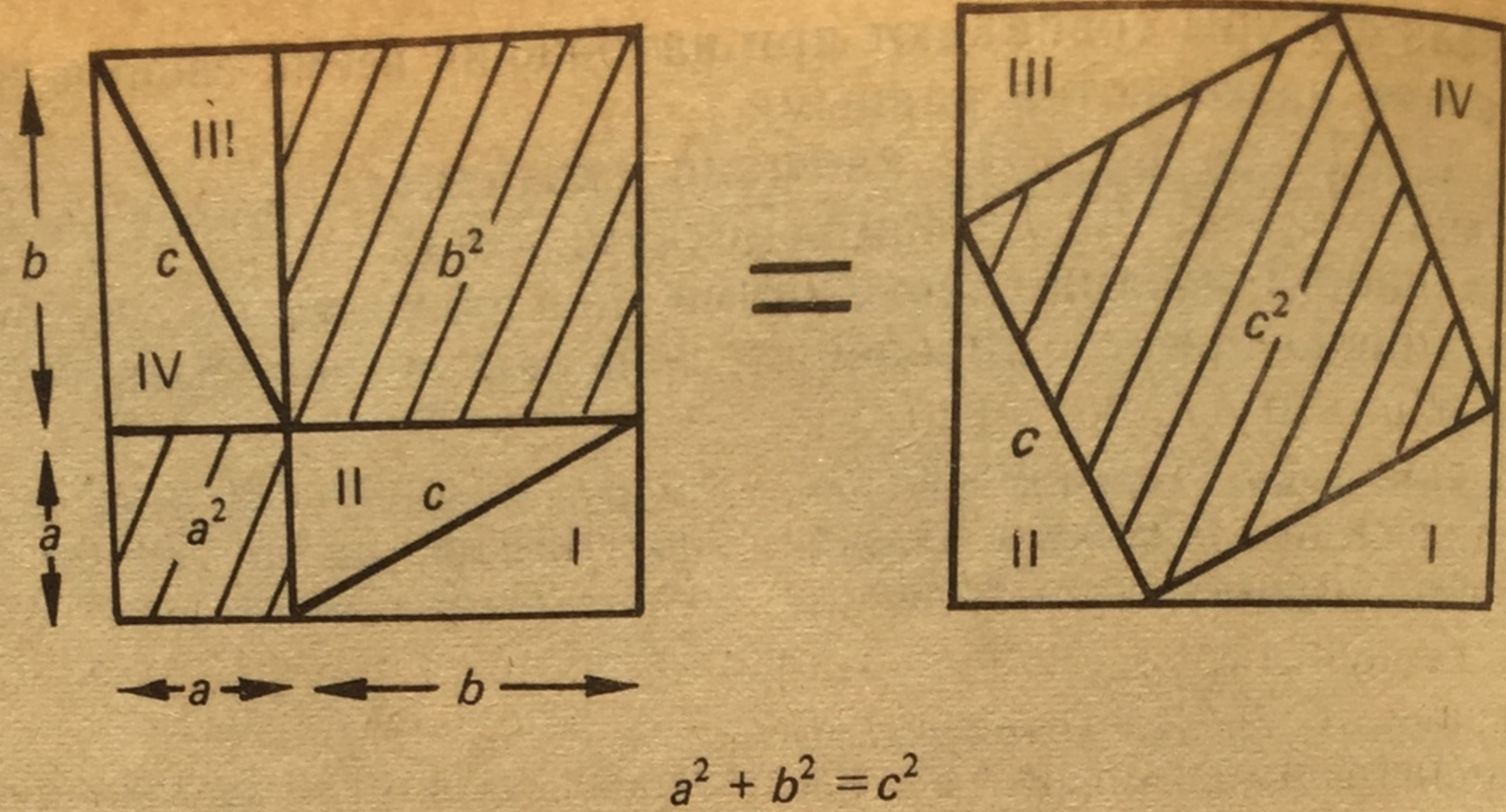



**Рис. 9**

презирать физический труд. Отнюдь не случайно поэтому у греческих математиков недооценивались наглядность, наблюдения, измерения, а риторика, логические рассуждения предпочитались опыту, факту, эмпирии. Именно в греческой математике мы находим истоки понятий «точность доказательства», «аксиоматическое построение математики», «доказательство от противоречащего», а затем на этой же почве возникли теоремы существования в анализе, парадоксы теории множеств и другие сугубо теоретические вопросы формально-логического обоснования математики, не имеющие прямого отношения к заботам методики обучения этой науке.

Аналитизм, элементаризм, формализм — характерные недостатки школьных уроков и учебников математики — имеют своим далеким истоком специфические особенности... греческой математики!

А. Пуанкаре в книге «О науке» указывает, что логика приводит часто к уродствам. Рассматривая книгу Д. Гильберта «Основания геометрии», в которой он специально исследовал логические отношения аксиом геометрии, Пуанкаре пишет, что он ее не рекомендует лицеисту (ученику средней школы), поскольку «в чтении ее он ушел бы не очень далеко».

В школах европейских стран утвердилось как многовековая традиция евклидовой геометрии обязательное деление геометрии на планиметрию и стереометрию (X—XI классы). Интересно, что Н. И. Лобачевский не признавал такого деления и написал единый учебник геометрии для студентов.

Между тем геометрия на плоскости — весьма искусственное образование, по существу абстракция от трехмерной геометрии, поскольку в мире вообще не существует двумерных предметов, не имеющих... толщины! Стереометрия не есть обобщение планиметрии, ибо она сама производит планиметрию. В мозгу чело-

века закодированы свойства трехмерного пространства, а не плоскости.

В. И. Ленин в своих «Философских тетрадях» выписывает следующие суждения Гегеля: «Если истинное абстрактно, то оно не истинно. Здравый человеческий разум стремится к конкретному... Философия в высшей степени враждебна абстрактному, ведет обратно к конкретному»[1].

В связи со сказанным заслуживает обсуждения следующая методическая гипотеза: следует изучать единую трехмерную геометрию начиная с I класса, памятуя, что уже дошкольник «знает» некоторые свойства куба и шара (задолго до свойств квадрата и окружности), поскольку восприятия куба и шара совершаются всеми его чувствами (он делает это, ощупывая, гладя, перекладывая, бросая и т. д.). Проводя ладонью по грани куба, он получает (не произнося ни слова!) логически не оформленные знания о «плоскости вообще»; проводя пальцем по ребру куба, знакомится на деле с содержанием понятия о «прямой вообще» и т. д. В контексте нашего обсуждения важно не только то, что плоскость и прямая оказываются «вместе» на одном реальном теле (кубе, многограннике); ощущение того, что две плоскости пересекаются по одной прямой или две прямые пересекаются в одной точке и т. п., создает в мозгу физиологический след для закрепления последующих геометрических абстракций двойственной природы:

Две $\frac{\text{точки}}{\text{прямые}}$ определяют одну $\frac{\text{точку}}{\text{прямую}}$.

Три $\frac{\text{точки}}{\text{плоскости}}$ определяют одну $\frac{\text{плоскость}}{\text{точку}}$.

Заметим, что во всех этих суждениях, основанных на опытных наблюдениях, мы не формулируем явно определений, аксиом.

Построение в школе такой трехмерной «опытной» геометрии с самого начала изучения математики может автоматически дать следующие решения: начальная геометрия не нуждается в аксиоматике; начальная геометрия (геометрия как физика) может опираться на физическое освоение мира предметов, на опыты и наблюдения; начальная геометрия вскрывает неиспользованные степени свободы психики и благодаря резервам подсознательных механизмов обогащает мир пространственных представлений, столь ценных для освоения любой науки.

Преимущества такого качественного обновления содержания геометрических знаний столь велики, что это трудно, наверное, представить интеллекту, воспитанному под многовековым прессом стерильной формализации, а именно — изучения планиметрии до стереометрии, теоретического до ...эмпирического (опытного), абстрактного до конкретного.

Вот предполагаемые фрагменты возможного построения уро-

[1] *Ленин В. И.* Полн. собр. соч. Т. 29. С. 221.

ков единой трехмерной геометрии, предлагаемой дидактически в плане «геометрия как физика». Вначале мы знакомим детей посредством наблюдений над фигурами и моделями тел со следующими парными суждениями:

Треугольник — простейший многоугольник.
У треугольника три стороны и три угла.
(Тут же, конечно, и простейшая символика.)

Четырехгранник (тетраэдр) — простейший многогранник. У четырехгранника четыре плоских грани (показать на модели), четыре вершины (показать), четыре трехгранных угла, шесть ребер (показать), шесть двугранных углов. Грани тетраэдра — это треугольники. Человек вначале научился видеть в природе призмы и тетраэдры, а потом лишь треугольники и четырехугольники (их грани).

В IV—V классах не найдется ни одного школьника, который не усвоит сразу это множество новых понятий, данных без определения, но в своих внутренних связях, предъявленных на реальном теле, которое можно ощупать, погладить, пересчитать его элементы и т. п.

Тут есть возможность немедленно подивиться проницательности великого геометра Эйлера: для выпуклых многогранников верно соотношение (без доказательства, проверкой факта): В+Г=Р+2 (рис. 10, 11). Сумма чисел вершин и граней больше числа ребер на 2.

Дается задание. Вырезать из картофелины четырехгранник. Проверить формулу Эйлера. Затем, отрезая ножом какие-либо уголки фигуры, получить более сложную фигуру и снова проверить на реальном теле формулу Эйлера.

В настоящее время эта теорема не изучается в официальных курсах даже пединститутов, поскольку топология не включена в учебные планы. Подобные теоремы сохраняют свою эстетическую ценность сильнее, будучи не доказаны, но проверены для разных конфигураций.

В предполагаемом же курсе единой геометрии мы находим теореме Эйлера место уже на начальных уроках геометрии VI класса. Школьную геометрию нельзя лишать простых, но удивительно красивых результатов! Но главное и наиболее спорное для методистов классического толка — впереди.

Пусть пришла пора вести речь о понятии «высота», «перпендикуляр». Вначале учим детей построению перпендикуляра к прямой угольником, двумя перегибаниями листа бумаги. И тут же — построение перпендикуляра к плоскости стола — демонстрация отвеса. Проводим опыт: находим взаимно перпендикулярные прямые и плоскости на гранях куба (или параллелепипеда). Широко используем и создаем ассоциации здравого смысла

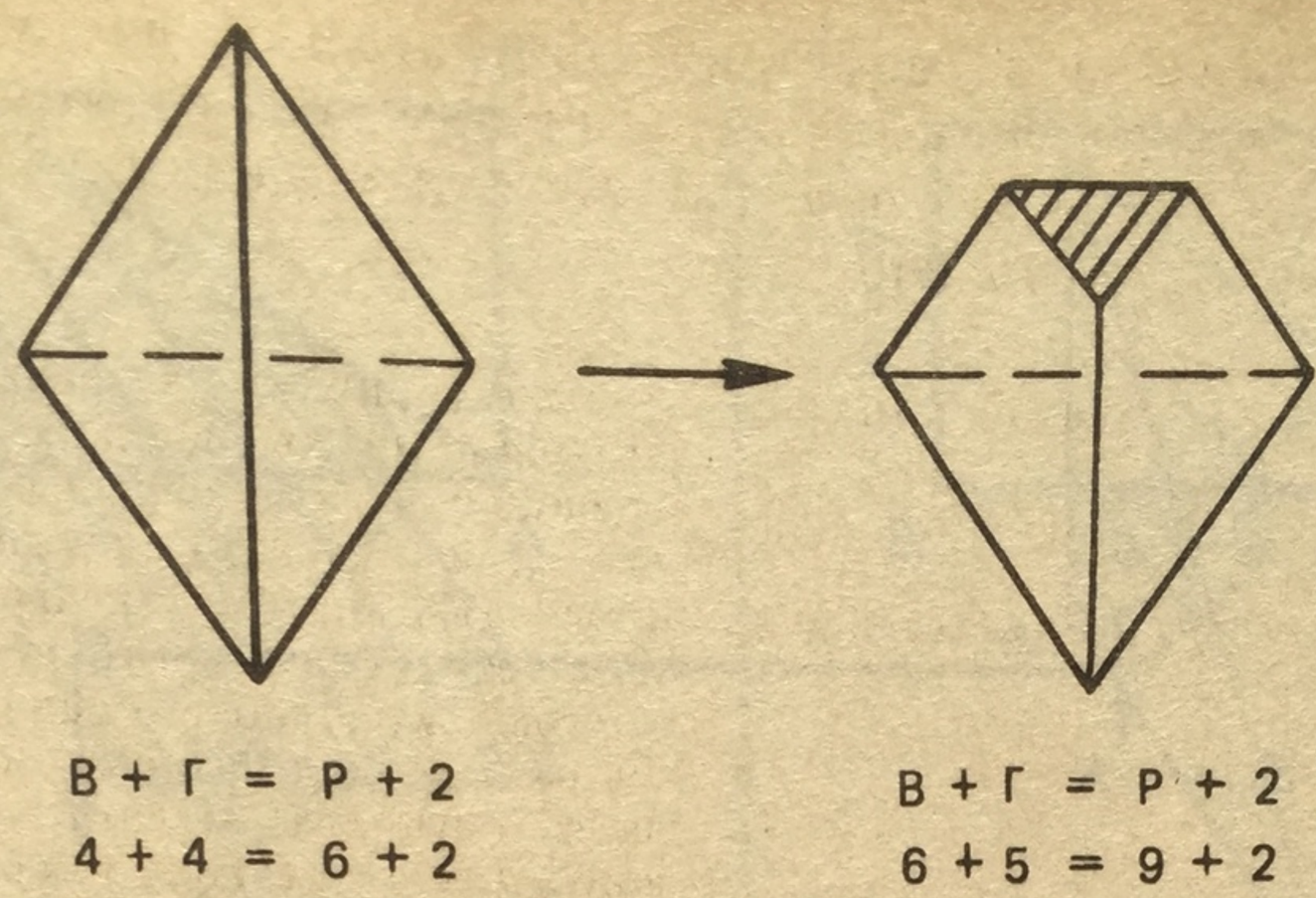



Рис. 10 Рис. 11

или обыденного познания. Постигаемые так знания — это «знания на уровне знакомства». Основной метод — демонстрации и словесные пояснения, а не логические доказательства.

Понятие высоты должно «работать», т. е. войти в систему упражнений и принести конкретную пользу (практического характера). Как этого добиться — вот в чем вопрос!

В предполагаемом курсе единой геометрии ядрами конденсации знаний должны стать прежде всего понятия практические, общие для физики и геометрии, а именно вопросы вычисления длины, площади и объема реальных предметов.

Итак, выводим правило нахождения площади прямоугольного треугольника:

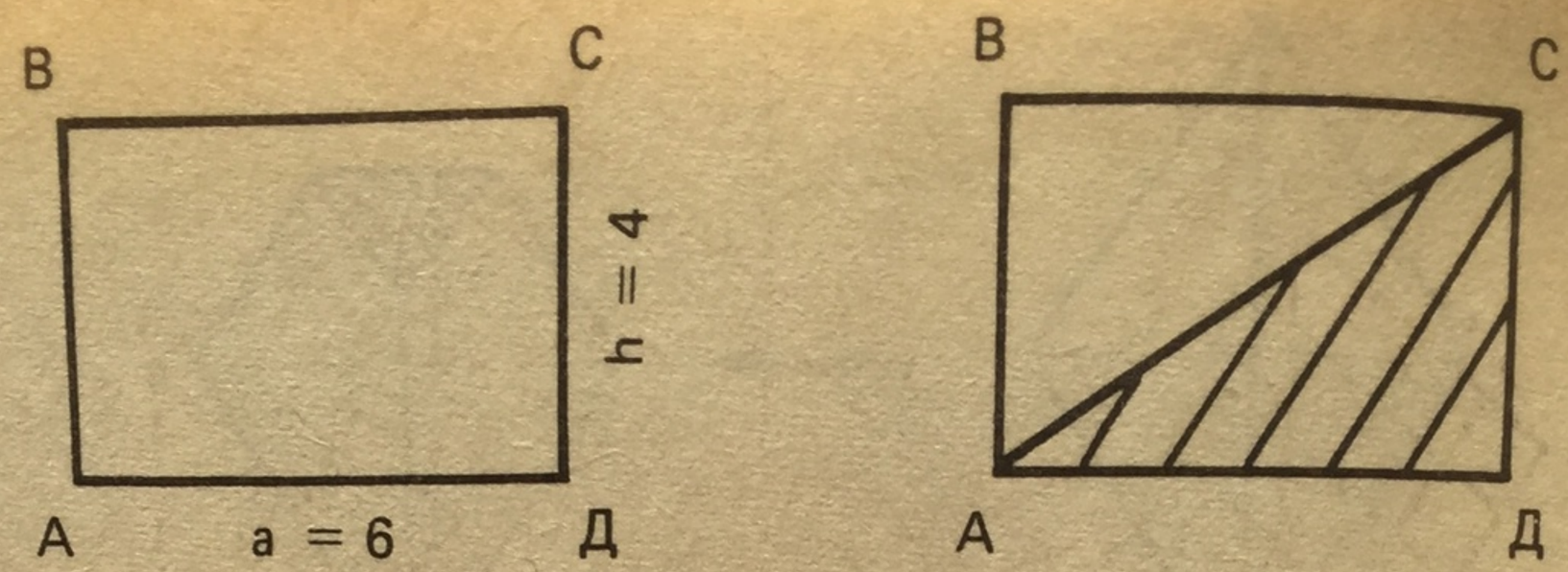
$$S=\frac{1}{2}a\cdot b.$$

Площадь конкретного треугольника, нарисованного с соблюдением размеров на клетчатой бумаге, находится двумя способами: 1) вычислением по заданной формуле; 2) подсчетом клеток (квадратных сантиметров).

Приблизительное совпадение двух ответов до поры до времени заменяет логическое доказательство (рис. 12). «Доказательство есть рассуждение, которое убеждает» (Л. Толстой).

При предлагаемом построении математики в справедливости формул убеждаем делом, опытом; доказательство силлогизмами приходит позже в разумных формах.

Что же должно быть дальше? В предполагаемой интегрированной геометрии учащимся без опаски должна быть сообщена аналогичная формула для решения вполне конкретной жизненной задачи — определения объема (емкости) простейшего многогранника.




$S_{\square} = a \cdot h$

$S_{\square} = 6 \cdot 4 = 24$ (см$^2$)

$2S_{\triangle АСД} = S_{\square}$

$S_{\triangle АСД} = \frac{1}{2} S_{\square} = \frac{1}{2} a \cdot h$

$S_{\triangle АСД} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$

$S_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12$ (см$^2$)

**Рис. 12**

Велика ли цена науки, если формула объема шара сообщается, как это имеет место сейчас, после... 9 лет обучения?

Итак, рассматриваем в паре с прямоугольным треугольником прямоугольный тетраэдр (рис. 13).

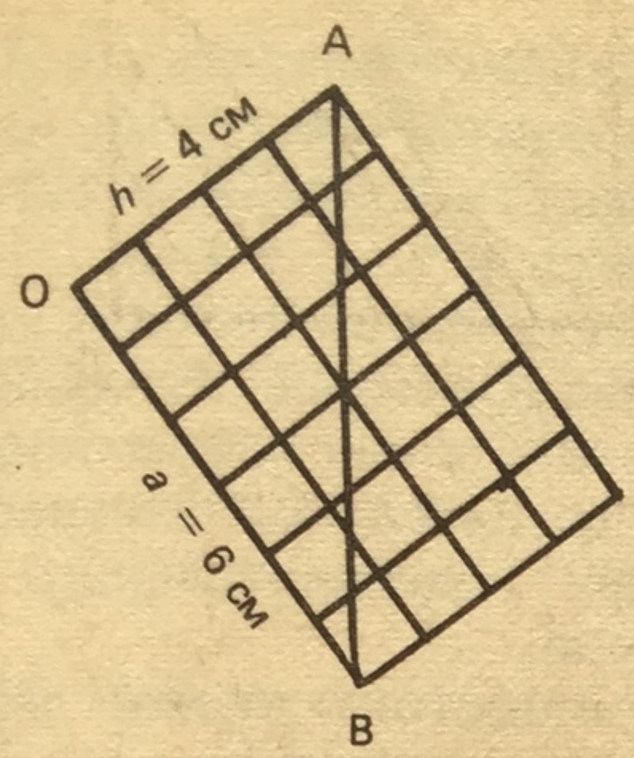
Делаем это, полностью ориентируясь на подсознательные резервы мышления. В конце концов структура математики во многом схожа со структурой филологии: большая часть знаний должна быть постигнута показом, пояснениями, опытом, а не строгими доказательствами.

Как же все-таки убедить школьника в правильности продиктованной формулы для объема пирамиды $V = \frac{1}{3} S \cdot h$? Способ тот же: достаточно сравнить два значения объема конкретной фигуры, полученные: а) вычислением по формуле; б) физическим опытом (с помощью мензурки).

Мы выше дали в вольном изложении отдельными мазками эпизоды предполагаемой *трехмерной геометрии,* в которой на основе аналогии и противопоставления многие сведения из стереометрии сообщаются и используются в младших классах, задолго до их логического вывода (скажем, формула объема пирамиды выводится затем интегрированием в X классе).

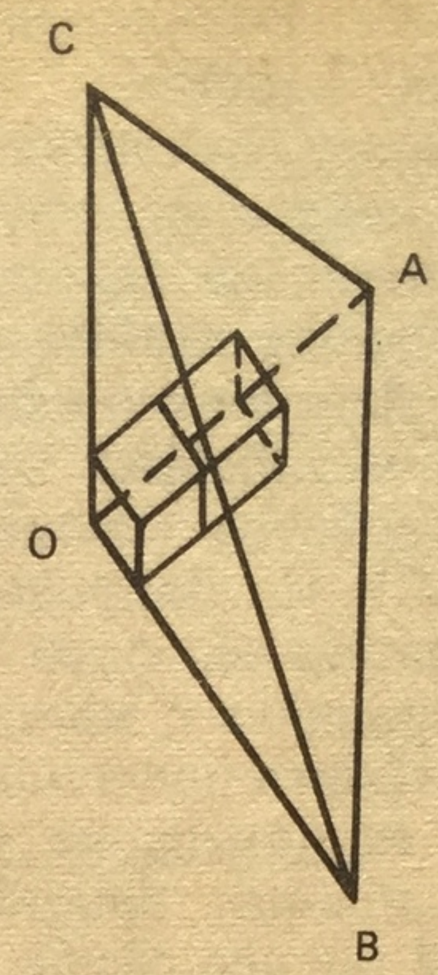
В современных учебниках планиметрии 20—30 страниц посвящается обсуждению таких понятий, как точка, луч, отрезок, взятых сами по себе, скажем, даже вне образа треугольника, их содержащего. Трехмерный же подход к науке о пространстве подключает имеющиеся (еще с рождения!) механизмы подсознательной переработки информации.

Если третьеклассник научился показывать на кубике точки




$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} a \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12$ см$^2$

$S_{\triangle} = \frac{1}{2} a \cdot h$




$V_{\triangle} = \frac{1}{3} S_{\triangle OAB} \cdot h = \frac{1}{3} a \cdot b \cdot h$

$V_{\triangle} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot b \cdot h$

**Рис. 13**

(вершины), отрезки (ребра), то это лишь видимое учителем; в глубине же подсознания школьника подготовлена тем самым (хотя обо всем этом не сказано пусть еще ни слова) великолепная почва для последующего понимания взаимных положений плоскостей и прямых, трехмерных координат и векторов, систем уравнений и т. д. и т. п., короче говоря, всей математики!

Надо отметить, что «доля убедительности» двух подходов к объему пирамиды, шара, цилиндра в двух случаях (формально-логический вывод формулы в старших классах и грубый контроль опытом формулы, сообщенной в готовом виде), как это ни странно, оказывается выше во втором случае: дело в том, что, будучи введены раньше в младших классах, пары равенств вида

а) 1м=10 дм и 1 м$^3$=10 дм· 10 дм· 10 дм=1000 дм$^3$,

б) $S=a\cdot b$ и $V=a\cdot b\cdot c$

становятся убедительными знаниями, поскольку они выдерживают проверку физическим опытом; такие сдвоенные упражнения являются хорошей пропедевтикой последующего логического вывода соответствующих формул для пространства.

Академик Н. П. Бехтерева как-то обронила замечательную мысль: «Маленький ребенок пошел в первый раз. Окликните его — он остановится или упадет: его мозг весь занят движением, нет места для другой деятельности! Но как скоро, становясь стереотипной, она освобождает мозг для следующих этапов

развития — выучивания таблицы умножения и познания простого и сложного мира».

В мозгу человека найдены специализированные нейроны, группы нейронов, реагирующие на определенные цвета, на толщину линий, на сплошность, непрерывность и прерывистость их, фиксирующие взаимное положение фигур и т. д. и т. п.

При построении единой трехмерной геометрии находят работу все эти механизмы, мыслимые как специфические вычислительные устройства (процессоры). По мнению члена-корреспондента АН СССР С. Лаврова, считая сферу сознательной переработки информации за один процессор, сферу подсознательного придется сравнить с миллионом процессоров.

Построить предполагаемую единую геометрию проще, чем получить ее признание у «специалистов от методики» по единственной и очень простой причине: педагогика нуждается в правильной оценке сферы подсознательного!

Мы недалеки от истины, утверждая: мучительно медленное четырехлетнее переползание от абстрактной планиметрии к конкретной стереометрии есть дань традиции (психологически неосмысленная!), есть роскошь, которую уже не может позволить себе эпоха НТР и ЭВМ.

К понятию «*неосознаваемое*» относится так называемый фон, сопровождающий усваиваемую информацию и поневоле воспринимаемый психикой. Учителям, например, известно, что считалка, рассчитанная на образные ассоциации, помогает запоминанию цифр («цифра 6 — дверной замочек» и т. п.). Во многих странах таблица умножения заучивается издавна детьми под ритмику музыки и движений.

В современной методике математики актуальным становится вопрос о создании единого курса математики (школы Эстонской ССР, ГДР и других стран работают по таким интегрированным учебникам).

И вот оказывается достаточно ряд заданий выполнять на клетчатой бумаге, как многие сложные понятия (и не только по математике!) обретают устойчивость в памяти. Клетчатая бумага — это фактически модель пространства: на ней само по себе число (координата) сочетается с точкой (линией), и так возникает мощное логическое средство познания математики на основе синтеза алгебраического с геометрическим.

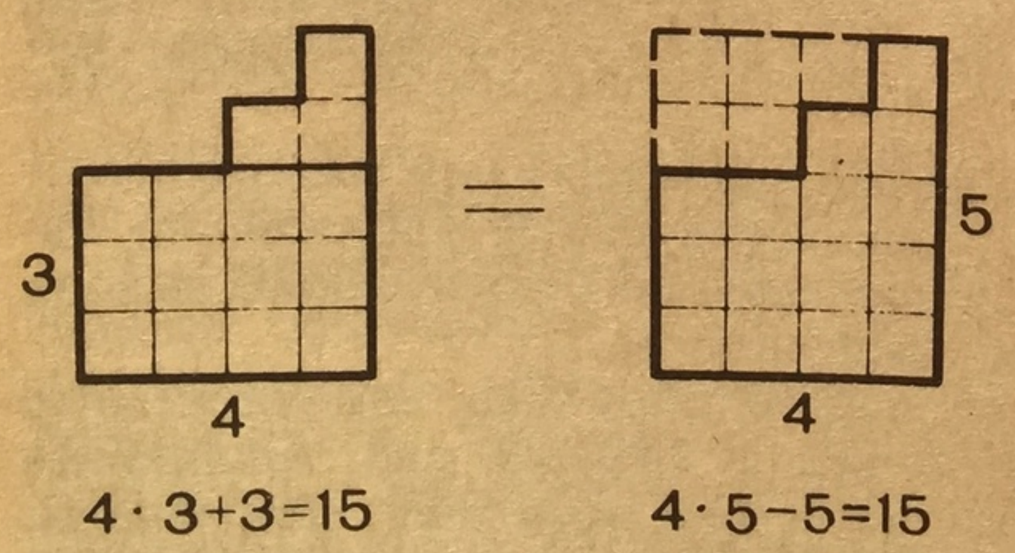
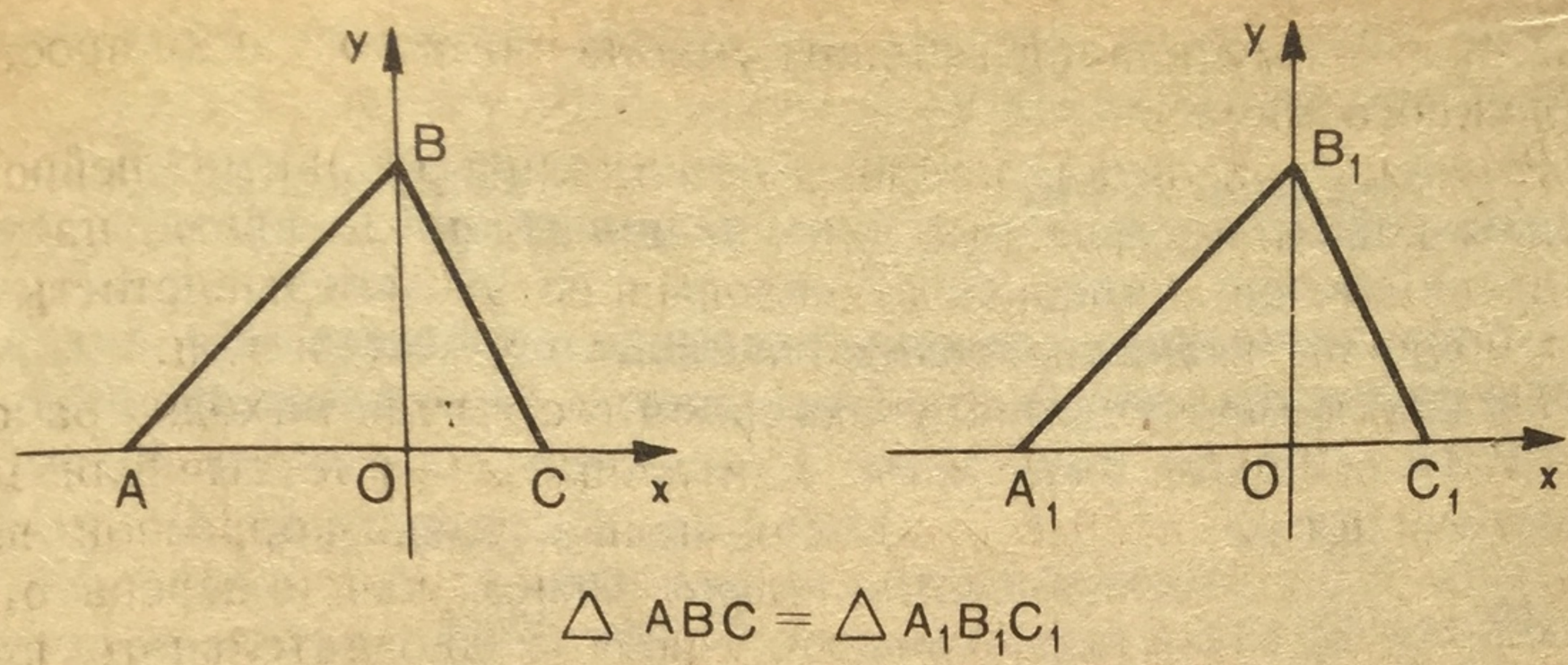



Рис. 14, а

Приведем несколько таких упражнений.




$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

**Рис. 14, б**

1. Сколько клеток на рисунке? Найти двумя способами. Написать соответствующие выражения (рис. 14, а).

2. Построить два равных треугольника (рис. 14, б).

3. Построить точку A= (5; 4; 3) по координатам. Построить вектор

$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ (рис. 14, в).

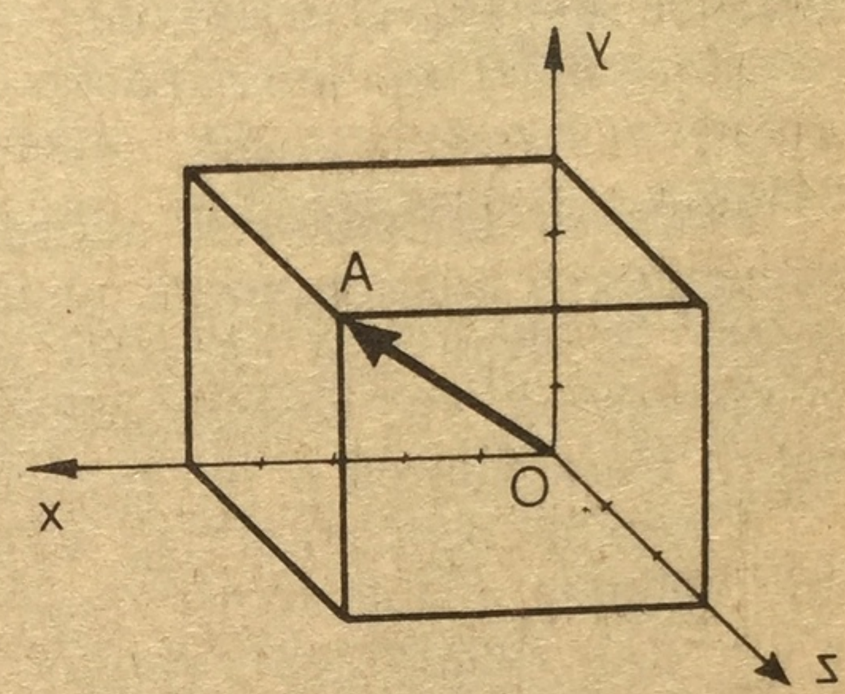



**Рис. 14, в**

## § 6. ВКЛАД УДЕ В САМОРАЗВИТИЕ МЫШЛЕНИЯ УЧАЩИХСЯ

Условие познания всех процессов мира в их «самодвижении», в их спонтанном развитии, в их живой жизни, есть познание их как единства противоположностей.

*В. И. Ленин*

В практике обучения так много случаев, когда школьник, получив от старшего лишь небольшую помощь, делает дальнейшие шаги в познании вполне самостоятельно.

Если, например, ученику объяснены пары переходов

$$3+4=7 \text{ и } 7-4=3$$
$$3+5=8 \text{ и } 8-5=3,$$

то достаточно решить следующий пример на сложение $3+6=9$, чтобы он уже сам сообразил (без подсказки учителя!) ответ обратного примера: $9-6=3$ и т. д.

Или еще. Пусть учитель разъяснил правило сокращенного умножения на числа $100 \pm 1$.

Умножение на 101:
$37 \cdot 101 = 3700 + 37 = 3737$

Умножение на 99:
$37 \cdot 99 = 37 \cdot 100 - 37 = 3700 - 37 = 3663$

Сообразительному ученику посильно обобщить оба правила, чтобы найти аналогичные приемы устного умножения на $1000 \pm 1$.

$a \cdot 1001 = a \cdot 1000 + a$

$$\begin{array}{r} 37 \cdot 1001 = 37000 \\ +\ 37 \\ \hline 37037 \end{array}$$

$a \cdot 999 = a \cdot (1000 - 1) =$
$= a \cdot 1000 - a$

$$\begin{array}{r} 37 \cdot 999 = 37000 \\ -\ 37 \\ \hline 36963 \end{array}$$

Учитель добивается настоящих успехов тогда, когда умеет раскрывать возможности учащихся по саморазвитию их интеллекта. В «Кратком словаре по философии» (М., 1985. С. 385) указывается, что саморазвитие объекта достигается тогда, когда часть развивается в органическое целое.

Главной особенностью методической системы УДЕ является достижение целостности знаний, превращение отдельного знания в систему взаимодействующих знаний.

Так, например, при методике совместного составления и решения четверок примеров

$3 \cdot 5 = 15$ $\quad$ $15 : 5 = 3$
$5 \cdot 3 = 15$ $\quad$ $15 : 3 = 5$

вся четверка заданий становится некоторой УДЕ. Впоследствии любой из этих примеров становится как бы представителем (заменителем) всей четверки заданий, причем данные четыре суждения проявляются в сознании одновременно, как некоторая целостность.

Однако если учитель придерживается, скажем, укрупненного концентра (слияние подконцентра «сотня» с концентром «тысяча»), то решение одного примера, допустим $15 : 5 = 3$, оказывается равноценным проявлению всего куста ассоциаций с именованными и отвлеченными числами на базе одних и тех же цифр 1, 3, 5, 0:

$15 : 5 = 3$, $\quad$ $3 \cdot 5 = 15$, $\quad$ $30 \cdot 5 = 150$,
$50 \cdot 3 = 150$, $\quad$ 50 см $\cdot$ 3 = 1 м 50 см,
150 кг : 5 = 30 кг и т. п.

Мы уже писали, что при обучении посредством УДЕ сокращение учебного времени против годовых норм составляет 14%. Но фактор времени при УДЕ проявляется как в большом, так и в

малом. В публикациях методистов, перепроверявших в различных условиях систему УДЕ, приводятся также цифровые данные об ускоренном усвоении знаний. Так, педагог Б. И. Коротяев писал, что при совместном изучении взаимно-обратных действий тема была изучена за 10 ч против 17 по плану, причем качество знаний в этом классе оказалось самым высоким.

А. Г. Глущенко (г. Славянск) считает, что благодаря совместному изучению сложения и вычитания удалось материал изучить за 12 ч вместо 20 по норме.

Мы видим, как дидактическая направленность УДЕ обретает социальное звучание: каждый сэкономленный учебный час становится реальным богатством ученика, учителя и родителя. Трудно переоценить этот факт при учете масштабов организованного внедрения системы УДЕ в массовую школу нашей страны, который тогда можно оценить в экономических категориях.

Учитель, который применяет на своих уроках методику укрупнения знаний, встречается с поистине удивительным явлением: на составление и решение обратной задачи времени тратится в несколько раз меньше, чем на решение одной исходной задачи; в этом мы находим объяснение тому, почему прием составления обратных задач так заметно сокращает время усвоения программных знаний. Ученик в наших классах нередко научался составить и решить 3—4 взаимно-обратных задачи в 2—3 действия в течение 4—5 мин!

Надежным ускорителем в постижении математических знаний оказывается *прием деформации* вычислительных упражнений. С каждым переизданием стабильных учебников таких заданий теперь становится все больше.

В этой связи интересен следующий факт, найденный в ходе экспериментального обучения. В школе № 82 Ногинского района Московской области мы провели специальную контрольную работу с целью определить скорость актуализации у учащихся первых числовых ассоциаций (экспериментатор С. Н. Жиркова). В контрольной предлагалось 20 заданий следующих видов:

$$8 \cdot 6 - 27 =,$$
$$\square \cdot 6 - 10 = 44,$$
$$(20 + \square) \cdot 8 = 720 \text{ и т. п.}$$

Экспериментатор, принимая работу от учащихся, отмечала на каждой из них время, за которое она была выполнена учеником. (Повторная проверка ответов после окончания всей работы не разрешалась.)

Результаты контрольной приведены в следующей таблице решенных примеров (на человека в минуту).

III класс (27 ноября 1979 г.).

| | Эксперим. кл. | Контр. кл. |
|---|---|---|
| Всего | 1,27 | 1,47 |
| Верно | 1,2 | 1,21 |
| Неверно | 0,15 | 0,26 |
| Коэффициент эффективности | $\frac{1,12}{1,12} \approx 88\%$ | $\frac{1,12}{1,47} \approx 82\%$ |

Данные этой таблицы весьма поучительны. Рассматривая первую строку, мы видим: в экспериментальных классах на человека в минуту решенных примеров меньше (?), чем в контрольных (1,27 и 1,47). Сравнивая же числа второй строки, мы видим: в экспериментальных классах на человека в минуту появляется среди написанных ответов относительно меньше верных (??), чем в контрольных классах (1,12 и 1,21).

«Так в чем же превосходство экспериментальных классов перед контрольными?»— вправе спросить читатель. Истина здесь оказалась спрятанной глубже: надо учесть скорость проявления ассоциаций во времени!

Вычислим долю верных ответов от количества всех зафиксированных ответов на одно и то же время. Для экспериментальных классов этот показатель составляет 88, а для контрольных — 82% (разница 6%). Результат многозначителен: в экспериментальных классах не «вообще меньше ошибок», а меньше ошибок допускается в среднем «на одного ученика в единицу времени». (Сравним: повышение КПД электрических машин лишь на 1% приносит многомиллионную экономию.)

Факты, как говорится, упрямая вещь. Более высокий коэффициент эффективности в экспериментальном классе доказывает то, что методика укрупнения дидактических единиц содействует выработке таких качеств личности, как меньшая опрометчивость в суждениях и поступках, большая обдуманность умозаключений и контрольных операций.

Сложность дидактического поиска заключается в том, что, ограничиваясь абсолютными числовыми показателями успеваемости вне учета расхода учебного времени, как это стало обычной нормой в современной методике и психологии обучения, мы не обнаруживаем глубинной сущности явления, скрытой в отношениях указанных числовых показателей (коэффициент эффективности), а не в самих этих показателях.

Методическая система, основанная на укрупнении знаний, проявляется в первую очередь локально в микродидактике урока, в правильности ответа к отдельному упражнению. Но, будучи используемой систематически, методика УДЕ проявляет свой эффект суммарно, глобально, при подведении итогов успеваемо-

сти за учебную четверть, за год. Подобные факты доказывают благотворное влияние системы укрупнения знаний не на отдельного ученика (сильного или слабого), а на коллектив класса в целом.

Системе укрупнения знаний присуще достоинство всеобщности: нами испытана с положительным исходом методика совместного изучения обыкновенных и десятичных дробей (в IV—V классах), взаимно-обратных теорем (в VI—X классах), умножения полиномов и разложения их на множители (в VI—VII классах), двух- и трехмерных векторов, понятий «производная» и «первообразная», «дифференциал» и «интеграл» и т. п., причем по мере переноса методической системы на более сложные разделы (на старшие классы) показатель экономии времени заметно возрастает.

Но наиболее характерное явление заключается в следующем. Экспериментальное обучение математике по нашим пробным учебникам было закончено в школе № 82 (пос. Черноголовка Московской области) в 1980 г. Состав экспериментальных классов был сохранен и на последующие годы, хотя в старших классах детей учили уже другие учителя по стабильным учебникам. В руках одного и того же учителя сохранялся бывший экспериментальный и бывший контрольный классы.

В 1982 г. были сопоставлены данные о качестве знаний учащихся тех и других классов. Выяснилось, что питомцы бывших экспериментальных классов по качеству знаний (оценки «4» и «5») опережали своих сверстников из контрольных классов на 6—8%, причем не только по математике, но и по истории, ботанике и другим предметам. Как сообщил нам заведующий лабораторией экспериментальных учебников АПН СССР О. Ф. Кабардин, через 5 лет после окончания эксперимента (в 1984 г.) преимущества экспериментальных классов в качестве знаний составили 7% по сравнению с контрольными.

Если можно позволить себе образное сравнение, влияние укрупнения знаний сопоставимо с плодами многолетнего растения или с явлением остаточного магнетизма в физике. В психологии соответствующее явление называется *переносом* новых умений в одном предмете на учебный материал по другим предметам.

Примечательно здесь следующее. Профессор психологии М. Швебель (США) исследовал на филологическом материале явление отдаленного переноса эффективных методов с одного материала на другой. В статье «Развитие познавательных способностей» он пишет: «...методы, обеспечивающие самоконтроль, дали лучшие результаты, причем это подтвердилось не только в ходе проверки, проведенной через две недели, но и год спустя. ...Еще более важно то, что дети прибегали к обобщениям в процессе усвоения знаний еще долгое время спустя после проведенного эксперимента, так как методы, освоенные в ходе запоминания

перечня слов, были перенесены ими на процесс изучения, понимания и запоминания рассказов»[1].

К слову сказать, в системе УДЕ такие приемы, как деформация заданий (5+□=9) или составление обратной задачи, несут дидактическую функцию самоконтроля знаний: если, скажем, при решении обратной задачи получено число, которое и должно быть получено, то это сигнал, что и прямая задача была решена также верно.

Стало быть, мы здесь имеем дело с психологическим явлением общего порядка: технология обучения тогда обладает свойством самопереноса (т. е. способностью стать сама по себе эффективным алгоритмом усвоения знаний), когда в ней присутствуют элементы циклов, обратных связей, «якобы возврата» к исходному элементу, самокоррекции.

Изложенное выше показывает, что все перечисленные качества присущи обучению посредством УДЕ: сложение проверяется вычитанием, прямая задача обратной, задача, составленная по заданному тождеству, соблюдением этого равенства в найденном ответе и т. д.

Данные профессора Швебеля (США) и наши данные по УДЕ различаются в главном: у нас обнаружено самопроявление переноса через 5 лет, причем после трехлетнего обучения математике по специально составленным нашим учебникам и программам во всех трех классах начальной школы.

Картина саморазвития знаний, иначе говоря — самостоятельного создания школьником новой учебной информации на базе того или иного упражнения, рельефнее всего видна в процессе составления обратных задач по отношению к исходной решенной задаче. Пусть решена следующая исходная задача (слева), которая затем преобразована в обратную (справа).

*Исходная задача:*

Купили 5 тетрадей по 2 коп. и ручку за 8 коп. Сколько стоит вся покупка?

Схема задачи:

5, 2, 8, □.

*Решение.*

1) 2·5=10 (коп.)
2) 10+8=18 (коп.)

*Обратная задача:*

Купили несколько тетрадей по 2 коп. и ручку за 8 коп. Вся покупка стоит 18 коп. Сколько купили тетрадей?

Схема задачи:

□, 2, 8, 18.

*Решение.*

1) 18—8=10 (коп.),
2) 10 : 2=5 (т.).

Сравнивая две строки, в которых записаны решения исходной и преобразованной задач, учитель вместе с учеником улавливает

[1] Перспективы. 1986. № 1. С. 9.

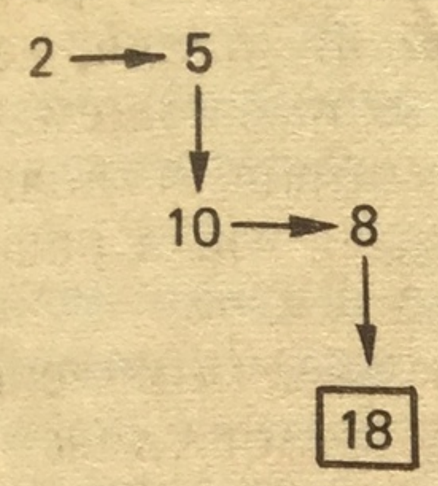



Рис. 15, а

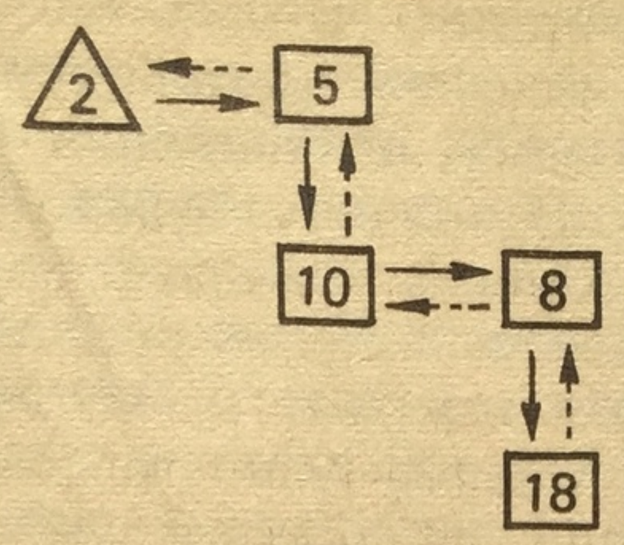



Рис. 15, б

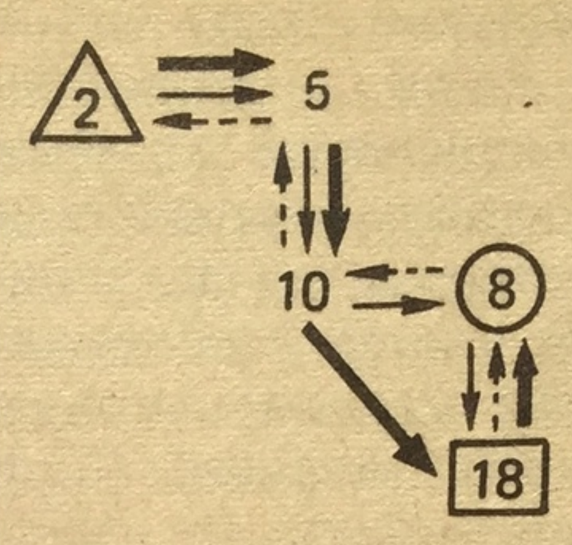



Рис. 15, в

связь первого действия прямой задачи ($2 \cdot 5 = 10$) со вторым действием обратной задачи ($10:2=5$), а также второго действия прямой задачи ($10+8=18$) с первым действием обратной задачи ($18-8=10$).

Образно говоря, два процесса (решение прямой задачи и составление и решение обратной задачи) сливаются в подсознании в некоторый замкнутый цикл суждений; развитие структуры этой самоусложняющейся мысли удобно изобразить последовательностью граф-схем (рис. 15, а, 15, б, 15, в). Мы видим, что каждое число условия прямой задачи может стать искомым в обратной задаче. На рисунках наглядно показано явление самовозрастания знаний на основе одних и тех же носителей информации (чисел) лишь за счет возникновения новых связей между ними, а именно: сплошные тонкие стрелки показывают решение исходной задачи (рис. 15, а); штриховые стрелки — решение первой обратной задачи (рис. 15, б); толстые стрелки — решение второй обратной задачи (рис. 15, в).

Усложняющаяся система связей (стрелок) в переходах означает *возникновение новой информации;* после некоторой тренировки таким приемом весьма охотно и вполне самостоятельно пользуются учащиеся. Можно сказать и так: исходная задача содержит в себе в потенции все возможные обратные задачи, подобно тому как в посеянном семени запрограммировано будущее растение.

Один из аспектов методической системы УДЕ — возникновение и разрешение проблем в ходе выполнения упражнения из состава УДЕ. В недрах укрупненного упражнения содержится больше понятий и связей между ними.

В иных пособиях наиболее трудным этапом при проблемном обучении считается обнаружение проблемы. «Проблема и ее ситуация лежит в области диалектики, а не логики. Она заключается в *контрастном* положении вещей друг к другу, контрастном

положении одной части вещи к другой ее части одновременно, и в таком контрастном, которое в природе своего совместного положения носит одновременно и возможность своего разрешения. Дети, разумеется, до такого рассуждения не доходят. Но они чувствуют контрастность целой вещи, переживают ее,— и вот самое переживанье и двигает вперед их самостоятельную мыслительную способность»[1].

В наших учебниках математики не случайно широко используется параллельная печать в чем-то контрастных (противоположных) заданий. С факта зрительного сопоставления задач и парных схем их решения начинается работа автодидактики, извлечение новой информации, саморазвитие знаний через решение проблем.

Диалектика как цель обучения — весьма деликатный вопрос. Непросто добиться того, чтобы усваиваемые знания несли диалектическую нагрузку. Во всяком случае, мало кто из авторов ставит себе такую задачу. В этой связи позволим себе небольшой экскурс в ... литературу.

Н. Г. Чернышевский, рецензируя повесть 27-летнего автора, назвал «диалектикой души» то его качество, благодаря которому из всех замечательных русских писателей лишь один этот автор умеет показывать, «как одни чувства и мысли развиваются из других». Автором повести был граф Л. Н. Толстой, который позднее отнюдь не случайно применил столь же диалектический прием составления и решения обратной задачи в своем учебнике.

Обратная задача есть «свое другое» исходной задачи. Контрастное их соположение в психике приносит первое дыхание проблемности, и здесь также произрастает «диалектика души».

В заключение рассмотрим кратко вопрос о «предыстории»: особой способности к саморазвитию знаний, о естественнонаучных источниках данного явления, недостаточно оцениваемого современной школой. Несколько десятилетий назад была открыта так называемая реакция Белоусова—Жаботинского: было обнаружено, что раствор особого вещества периодически меняет свой цвет от красного к синему в зависимости от концентрации соответствующих ионов.

Академик Н. Н. Семенов, получивший за химическую теорию цепных процессов Ленинскую и Нобелевскую премии, утверждал, что наличие самоподдерживающейся цепной реакции может оказаться реальностью не только в химии, но и в биологии. И было действительно обнаружено, что самоподдерживающиеся реакции играют важнейшую роль в биохимических процессах при переходе от предбиологических форм к простейшим живым системам. Живая материя обладает способностью к возникновению у нее качественно новых структур, а зачатки этой способности обна-

[1] *Шагинян М.* Человек и время. М., 1980. С. 133.

ружены на разных ступенях развития материи.

В связи с изложенным исключительно ценным представляется исследование психолога Е. И. Бойко, который обнаружил, что в продуктивном процессе имеется возможность получения новых знаний в самом процессе, т. е. спонтанно, а не путем заимствования извне. «Развитие, таким образом,— пишет он,— выражается здесь в самовозрастании знания при посредстве внутреннего взаимодействия познавательных компонентов той или иной информационной системы». «Вообще говоря,— поясняет исследователь,— мозг работает по принципу рефлекса; спонтанно, самоорганизуясь в своей микроструктуре через внутреннее взаимодействие центральных компонентов этих рефлексов, он развивается по принципу межрефлекторного взаимодействия как частного случая более широкого биологического принципа функционального совмещения»[1].

Так с психологических позиций выясняется, что при соответствующей технологии обучения становятся действительными потенции знания к самовозрастанию, саморазвитию.

Обучение на основе укрупнения исходного знания посредством преобразования задачи в обратную, обобщения задачи, построения матриц или граф-схем упражнений имеет ту особенность, что к исходной информации добавляется новая, причем удается научить такому искусству «размножения знания» всех учащихся. В этой системе обучения активной личностью, субъектом становится сам учащийся. Таким образом, диалектический тезис о саморазвитии интеллекта школьника имеет своей материальной основой самоорганизующиеся процессы, берущие начало генетически не только в органической, но даже и в неорганической материи. Эффективность УДЕ объясняется в конечном счете тем, что она благоприятствует самовозрастанию информации в голове школьника. В связи с этим особого внимания заслуживает следующий факт. Действовавшие в 1983 г. программы начальной школы содержали прогрессивное требование: «Наряду с решением готовых задач полезно упражнять детей в самостоятельном составлении задач по различным заданиям учителя».

Увы, в программах для четырехлетней начальной школы 1985 г. данный тезис опущен. Несомненно, что этот шаг сделан из-за недооценки философского и психологического значений полноценного знания и мышления школьника, недооценки важнейшей роли, которую играет в обучении продуктивное (творческое) мышление, и переоценки тем самым репродуктивных процессов, нацело заполнивших современный урок посредством сведения его к получению готовых знаний и к решению готовых задач.

В то же время наш многолетний опыт построения системы

[1] *Бойко Е. И.* Механизмы умственной деятельности. М., 1976. С. 223, 235.

начального обучения математике на идеях УДЕ показывает наличие здесь поистине нетронутых резервов развития активного творческого мышления, причем несложными методическими средствами, которыми может овладеть каждый учитель.

Приведем один пример. Пусть решена классом следующая задача на «встречное движение»: 1. «Два велосипедиста находились на расстоянии 240 м. Они одновременно поехали навстречу друг другу со скоростями 5 м и 3 м в секунду. Какое расстояние будет между ними через 10 с?»

*Решение.* 1) $5+3=8$ (м), 2) $8\cdot 10=80$ (м), 3) $240-80=$ $=160$ (м).

После решения задачи можно предложить ученику творческое задание в весьма различных формах, например:

2. Найти расстояние между велосипедистами через 20 с; 25 с; до встречи; через 50 с.

3. Составить задачу с тем же условием и теми же числами, но заменив слово «навстречу» словом «вдогонку» (или «в разные стороны»).

4. Составить задачу, похожую на исходную, но по формуле $240-(5+3)\cdot 25=$ . И т. д. и т. п.

С сожалением приходится отмечать, что технология УДЕ, раскрываемая через понятия «обратная задача», «деформация равенств», «противопоставление», «составление задач», в настоящее время начисто отсутствует в программах и учебниках старших классов. Поиски в этом направлении откроют поистине колоссальные резервы развития творческого, диалектического мышления как учащихся, так и учителей.

В учебных планах педвузов предусмотрен обязательный курс «Практикум по *решению* математических (школьных) задач», на который выделено 210 ч. Добавление к этому названию лишь одного слова сделало бы данный курс действительно профессиональным для будущих учителей: «Практикум по *составлению и решению* математических (школьных) задач». Такое предложение нами было сделано 10 лет назад.

Слишком уж долог путь от науки к школе...

## § 7. ОБРАТИМОСТЬ ОПЕРАЦИЙ КАК ОСНОВА СОЗНАТЕЛЬНОСТИ УСВОЕНИЯ ЗНАНИЙ

...Ум с самого начала опирается на обратимость, значение которой в процессе развития все время увеличивается.

*Жан Пиаже*

Для того чтобы каждая задача могла считаться вполне решенной, необходимо решать или, по крайней мере, точно формулировать сущность задачи, ей обратной.

*Н. Г. Чеботарев*

В учебниках математики для IV—V классов, изданных в 1971 г., предусматривалось изучение четырех действий в отдельных темах; однако с 1979 г. авторы перешли к изложению этого материала в двух укрупненных темах — «Сложение и вычитание», «Умножение и деление». Еще раньше к таким сдвоенным разделам перешли в начальной школе. Предложения по такому усовершенствованию структуры программ были опубликованы нами в 1963 г.

Такое нововведение утвердилось в школе потому, что оно соответствовало психологической закономерности — обратимости операций, лежащей в основе любых умственных операций.

Роль и место обратимых связей в мыслительных процессах были детальнейшим образом исследованы известным психологом Ж. Пиаже. Он пришел к выводу, что развитие психики ребенка зависит прежде всего от сформированности «группы перемещений», которая, в свою очередь, тесно связана «с постепенным развитием организации движений в пространстве — как движения объектов, так и собственных перемещений ребенка. Когда это развитие закончено, ребенок умеет проследить за рядом последовательных перемещений предмета, даже если сам предмет был невидимым; кроме того, ребенок может определить собственный путь и возвратиться к месту, с которого начал движение».

Наиболее существенной характеристикой «группы перемещений» является обратимость, когда ребенок научается практически (а значит, и в уме) «обращать движение из точки А к точке В так, чтобы попасть снова в точку А».

«Например, когда ребенок делает вывод о неизменности количества некоторого множества предметов, несмотря на производимые изменения в их пространственном расположении, то считается, что его рассуждения основаны на умении вновь возвратиться к исходному расположению предметов просто за счет обращения движений, которые привели к данному изменению.

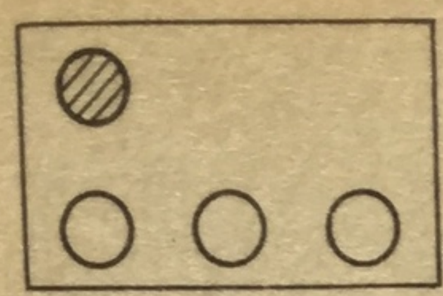


Рис. 16, а

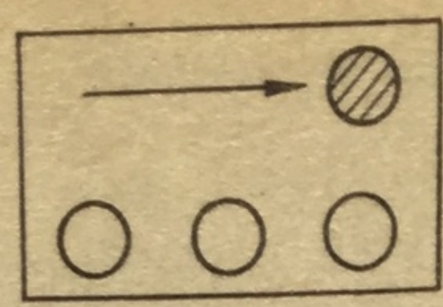


Рис. 16, б

Следовательно, его мышление обратимо»[1].

Дадим пояснение сказанному. Пусть, согласно рис. 16, а, ребенок установил количество кружков — четыре круга. Пусть воспитатель перемещает вправо верхний кружок (рис. 16, б).

Ребенок на вопрос «Сколько теперь кружков?» отвечает, скажем, немедленно: «четыре»; это означает, что своим подсознанием он понимает, что возможно восстановление исходного положения всей картины обратным перемещением верхнего кружка влево на то место, которое кружок занимал до изменения. Итак, первичное представление о сохранении количества предметов возникает благодаря приобретению более общего умения — обратимости перемещений вообще.

А вот другой опыт. Ребенку показывают, как из пластилина скатан шарик, потом на глазах детей раскатываем шарик в палочку, которая «тоньше», «длиннее» шарика (рис. 17).

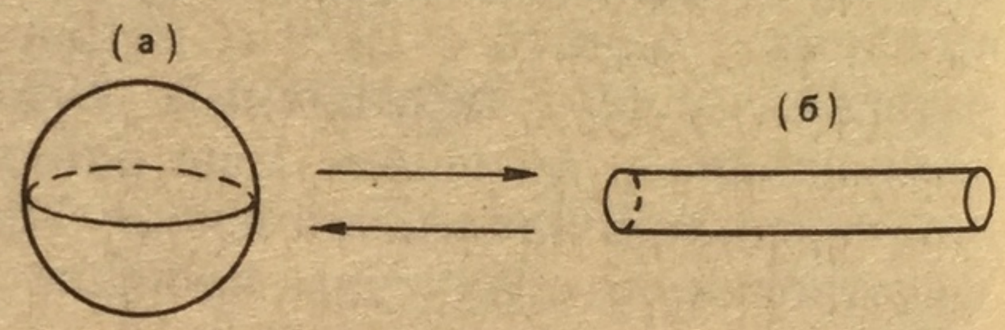



Рис. 17

Отвечая на вопрос о том, где больше пластилина, дошкольник чаще всего показывает на палочку. Чтобы создать представление о сохранении количества пластилина (вещества), надо повторить опыт несколько раз в прямом и обратном направлении: шарик раскатать в палочку и обратно палочку раскатать в шарик и т. д.

А вот другой опыт, создающий представление о сохранении объема жидкости (рис. 18).

Одной и той же мерной кружкой *А* наливают жидкость в широкий сосуд *В* и в узкий сосуд *С*. Когда у ребенка спрашивают, где больше воды — в *В* или в *С*, он может ответить: больше в сосуде *С*. Чтобы доказать, что в сосуде *В* и *С* жидкости поровну, надо обратным переливанием в кружку доказать, что жидкости не убавилось и не прибавилось.

Понимание детьми обратимости, важнейшего свойства рассудочного (доказательного) мышления вообще, достигается не сразу, а требует терпеливых усилий педагога, специальных тренировок. Авторы учебников математики могут создать специальную систему упражнений, содействующих выработке этого приема мышления.

Если принятая система обучения такова, что прямая связь (4·2=8) незамедлительно превращается в обратную связь

[1] *Доналдсон М.* Мыслительная деятельность детей. М., 1985. С. 165.

(8:2=4), то говорят, что эта система опирается на обратимость.

Прямая ($a \rightarrow b$) и обратная связь мыслей ($a \leftarrow b$) — это разные процессы; прямая связь в психике самопроизвольно не переходит в обратную связь; при методике раздельного изучения, как показывает опыт каждого, такие знания могут годами сосуществовать без взаимодействия, без перехода в новое качество, в единство взаимно-обратных связей, которое удобно изобразить символически так: $a \rightleftarrows b$.

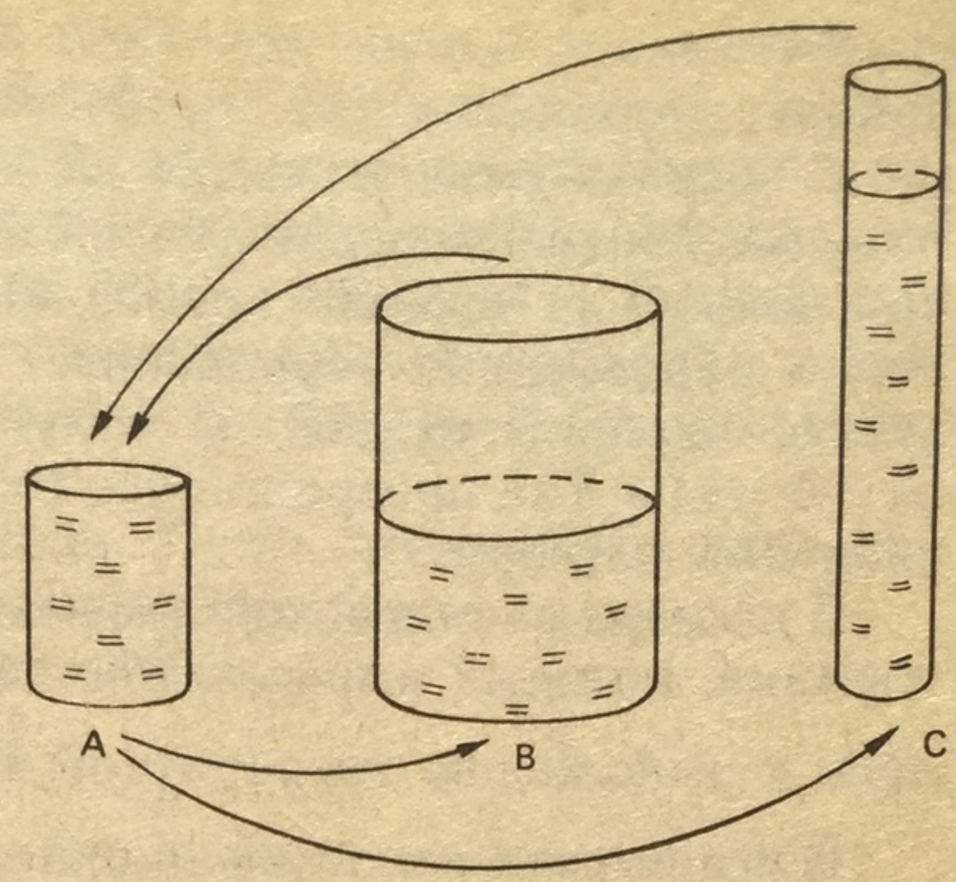



Рис. 18

Кто проводил или хотя бы наблюдал уроки математики в I классе, тот знает, как нелегко установить обратимость логических операций: из того, что «2 яблока да 1 яблоко составляют 3 яблока», ребенок лишь через множество повторений, рассуждений и, главное, через практические манипуляции с предметами приходит к пониманию соответствующего обращенного суждения: «Если из 3 яблок съесть 1 яблоко, то останется 2 яблока». Забота о культивировании обратимых связей проявляется впоследствии положительно при совместном изучении не только сложения и вычитания чисел (многочленов), но и дифференцирования и интегрирования и т. п. контрастных операций. Короче говоря, обратимые ассоциации лежат в основе любых парных операций математики, элементарной и высшей. Правильный учет психологического явления обратимости содействует созданию практичной (экономной) структуры программ и учебников математики.

Надо отметить, что обратимость операций как закономерность функционирования психики проявлялась в той или иной форме в истории математики задолго до исследований Ж. Пиаже, при этом уже на заре человеческой истории взаимно-обратные операции осваивались совместно. Так, еще при пальцевом счете — при счете «пятка́ми» — человек научился, например, число 14 представлять через сложение и вычитание одновременно (как 10+4 и как 15—1).

Историческими исследованиями установлено, что в математике обращение ранее известной операции приводило к качественно новой операции, более сложной по содержанию. Так, вначале владели лишь прямым порядком операций над рациональными числами (3· 5—4= ); поскольку действия здесь выполнялись в том порядке, в каком они зафиксированы, скажем, в данной запи-

си, постольку они не выходили за пределы арифметики. Найдя правую часть равенства, мы приходим к тождеству ($3 \cdot 5-4=11$).

С возникновением мысли об обращении этих действий (один из компонентов становится переменной, а ответ первого выражения входит в условие нового примера) возникает качественно новое образование — уравнение. (Заменив в предыдущем тождестве число 5 буквой $x$, получим уравнение первой степени: $3x-4=11$.) Так превращалось тождество в уравнение, а арифметика — в алгебру.

В шумеро-вавилонской математике даже не было специального термина, который выражал бы действие деления, деление сводилось к умножению на обратное число $6:3=6 \cdot \frac{1}{3}$.

В египетских иероглифах одним и тем же символом обозначались два противоположных понятия («вверху» и «внизу»; «с» и «без» и т. п.).

Профессор К. А. Рыбников в книге «История математики» указывает, что внутренней причиной открытия и развития математического анализа было исследование «обратных задач на касательные» и выявление взаимообратности задач на дифференцирование и интегрирование.

Ф. Энгельс подчеркивал, что каждое вычитание $a-b$ можно изобразить как сложение $a+(-b)$, каждое деление $a:b$ — как умножение $a \cdot \frac{1}{b}$. Эти возможности видоизменения действий соответствуют законам диалектики. Далее он указывал: «И это превращение из одной формы в другую, противоположную, вовсе не праздная игра — это один из самых могучих рачагов математической науки, без которого в настоящее время нельзя произвести ни одного сколько-нибудь сложного вычисления»[1].

Переходы от одной формы математического выражения к другой, двусторонние связи, существующие между парами операций, будучи «самыми могучими рычагами в математике», неизбежно должны быть также определяющими и в системе методов обучения этой науке. Математика, как никакой другой учебный предмет, в силу своей внутренней структуры насквозь пронизана взаимно-обратными связями.

Рассмотрим примеры соответствующих ассоциаций, возникающих в голове школьника при обучении математике.

Первоклассник воспринимает написанное на доске упражнение $2+3=$ (первый член ассоциации); затем называет результат — число 5 (второй член ассоциации). Если же он разлагает число 5 на два слагаемых ($5=2+3$; пять состоит из чисел 2 и 3), то звено в цепи умозаключений можно назвать обратной ассоциацией.

«Ассоциация»— понятие психологическое; ассоциация либо

[1] *Энгельс Ф.* Диалектика природы. 1982. С. 224.

проявляется (актуализируется), либо не проявляется; понятия «истинность»—«ложность» относятся к высказываниям, т. е. к категориям логическим. *Искусство обучения* заключается в закреплении сложных цепей и циклов верных, нужных ассоциаций и своевременном отсеивании неверных, ненужных. Правильное использование явления обратимости ассоциаций приводит к конструированию продуктивной методической системы обучения математике.

Начнем с простейших примеров. Пусть речь идет о введении понятия «десятичная дробь». Рассуждаем так:

$$\text{Если } 1\text{ м} = 100\text{ см},$$
$$\uparrow\downarrow$$
$$\frac{1}{100}\text{ м} = \frac{100}{100}\text{ см},$$
$$\downarrow\uparrow$$
$$\frac{1}{100}\text{ м} = 1\text{см},$$
$$\downarrow\uparrow$$
$$0{,}01\text{ м} = 1\text{см}.$$

В этой цепи обратимых преобразований использована специальная технология записей, а именно: наименование «м» мы сохраняем слева, а «см»— справа.

При умножении или делении обеих частей равенства на одно и то же число равенство не нарушается:

$$1\text{м} = 100\text{см},$$
$$\downarrow\uparrow$$
$$0{,}01\text{м} = 1\text{см}.$$

Подобная деталь в переработке цифровой информации обнаруживает новый методический путь к усвоению понятия «дробный показатель степени». Рассмотрим следующую цепь преобразований:

$$64 = 64$$
$$\downarrow$$
$$8\cdot 8 = 4\cdot 4\cdot 4$$
$$\downarrow$$
$$8^2 = 4^3$$
$$\downarrow$$
$$8^{2/2} = 4^{3/2} = \sqrt{4^3}$$
$$\downarrow$$
$$8 = 4^{3/2}$$

Преобразования можно провести и в другом порядке:

$$8\cdot 8 = 4\cdot 4\cdot 4,$$
$$\downarrow$$
$$8^2 = 4^3,$$
$$\downarrow$$
$$\sqrt[3]{8^2} = 8^{2/3} = 4^{3/3},$$
$$\downarrow$$
$$\sqrt[3]{8^2} = 4.$$

В настоящее время в математике старших классов используются два способа записи степени числа (используют дробные показатели и еще по традиции радикалы): $8 = \sqrt{4^3} = 4^{3/2}$.

Между тем, по-видимому, возможно здесь в основном использовать дробные показатели, поскольку в преобразованиях дробных показателей легко усматривается обратимость связей:

$$8^2=4^3$$

$$8=4^{3/2} \qquad 8^{3/2}=4.$$

Если две степени равны, то их показатели можно умножить или разделить на одно и то же положительное число.

Широкое использование неудачного символа радикала затягивает усвоение преобразований степеней; при этом происходит ненужное дублирование информации, поскольку извлечение корня есть не что иное, как частный случай возведения в степень (с дробным показателем).

Другим примером возможного учета обратимых ассоциаций может служить практика обучения математическому анализу. В большинстве учебных руководств дифференциальное исчисление занимает, скажем, первый семестр (первый том учебника), а интегральное исчисление — второй семестр (второй том учебника). Однако известный математик Р. Курант, иностранный член АН СССР, пишет, что «традиционное разделение интегрального и дифференциального исчислений является результатом исторических случайностей, не обосновано ни дидактически, ни по существу и мешает выяснению основного пункта, именно связи между интегралом и производной»[1].

В нашем опыте построения начальных глав математического анализа оказалось целесообразным опираться в преобразованиях также на обратимые ассоциации (рис. 19).

Мы видим: в целях использования явления обратимости иногда выгодно ввести подробные записи, которые потом совершаются в уме. Обратные связи между мыслями возникают при выполнении деформированных упражнений, и не только по математике. Например, приведенные ниже задания по грамматике неизменно вызывают интерес учащихся.

«К данным словам подобрать синонимы либо с частицей «не», либо без нее:

| | |
|---|---|
| нередко — часто, | нескромно — . . . . . |
| неровно — . . . . . ., | . . . . . — просто, |
| . . . . . — путанно, | и т. д. |

В данном задании преобразование словоформы осуществляется в двух направлениях, а не в одном, как это обычно бывает в школьных учебниках.

Следующее упражнение рассчитано также на двусторонние переходы между синтаксическими формами:

[1] *Курант Р.* Курс дифференциального и интегрального исчислений. Т. 1. М., 1967.

| | |
|---|---|
| | Дифференцирование → |
| | $(И(x) + C) = П(x)$<br>$(x^3 + C) = 3x^2$ |
| | Интегрирование ← |
| Предварительная запись<br>(читаем справа налево) | $И(x) + C = \int П(x)\,dx$<br>$x^3 + C = \int 3x^2\,dx$ |
| Окончательная запись<br>(слева направо) | $\int П(x)\,dx = И(x) + C$<br>$\int 3x^2\,dx = x^3 + C$ |

**Рис. 19**

*Действительный оборот:*

**Боец зарядил винтовку.**
**Плющ обвивает беседку.**
. . . . . .

*Страдательный оборот:*

**Винтовка заряжена бойцом.**
. . . . . .
**Посевы повреждены саранчой.**

Принцип обратных связей играет исключительно большую роль для практики обучения (в особенности математике). Структура этого учебного предмета сама по себе требует специальной организации методов обучения с целью извлечения дополнительной информации, скрытой в том или ином выражении (формуле, задаче, графике). На уроках математики нельзя добиться успеха простыми повторениями однообразных упражнений, так как последние превращаются при этом в индифферентный (безразличный) для обучающегося раздражитель. Однообразие, по выражению И. П. Павлова, утомляет и усыпляет.

Пусть, скажем, решается пример: 2· 6—5=. Здесь левая часть выражения задана; надо найти правую часть. Если ученик знает соответствующие правила и таблицы, то он без труда находит ответ: 2· 6—5=7. Как говорится, ничего хитрого нет в решении такого задания. Однако если подавляющее большинство упражнений имеет только такую форму (левая часть известна, требуется найти правую), то эта видимая простота заданий приводит в конечном счете к формализму в знаниях школьников.

В этих случаях повторение превращается из «матери учения» в

его «мачеху». Истинная же «мать учения»— это преобразование первоначального, исходного задания в другие формы, с ним связанные.

Психологическое понятие «обратимость ассоциации» имеет тесную связь с явлениями, характеризуемыми в кибернетике посредством понятия «обратная связь» (точнее —«циклическая связь»).

Пусть предложены вместо определенного выражения $2 \cdot 6-5=$ $=$ (с единственным ответом) неопределенные задания той же структуры:

$$\square \cdot 7-8=13,$$
$$3 \cdot \square-\square=10 \text{ и т. д.}$$

Учителя единодушно говорят о резком повышении живого интереса детей к таким заданиям. В чем же тут дело? Почему столь несложный прием (так называемое «остранение» обычного), т. е. изменение лишь формы задания, превращает наскучившую было форму в интересное, содержательное упражнение, полное проб, прикидок, рассуждений, двустороннего движения мыслительного взора между правой и левой частями равенства, которое сигнализирует о процессах сравнения, согласования элементов должного и получившегося?

Вопрос о месте и роли обратных связей в процессе обучения — один из центральных для дидактики. Общая схема психических процессов, осуществляющихся по схеме обратных связей, представлена на рис. 20. На схеме показано, как в ячейку *A* попадает входная информация, которая после переработки, перекодировки, т. е. после различных преобразований, обретает новую форму (ячейка *B*); из ячейки *B* информация сразу не идет на выход, а возвращается в ячейку *A*, где осуществляется процесс сличения полученного результата с заданными параметрами, т. е. с тем, что должно было получиться.

Особенности процесса решения приведенных выше деформированных примеров, т. е. упражнений с пропущенными членами, с точки зрения принципа обратных связей можно условно объяснить так.

Допустим, определенные клетки головного мозга (*A*) воспринимают условие деформированного примера $\square \cdot 7-8=13$. Задание понято: это пример на умножение и вычитание чисел, отдельные из которых требуется найти. Дальше у решающего поток мыслей может принять, видимо, характер последовательных проб, перебора возможных значений пропущенного числа. Пусть он подставил число 2 внутрь пустой клетки, тогда имеем: $2 \cdot 7-8=6$.

Представим теперь, что соответствующая информация, связанная с последним равенством, поступила в ячейку *B* ( т. е. в новую группу нервных клеток, которая включает частично и ра-

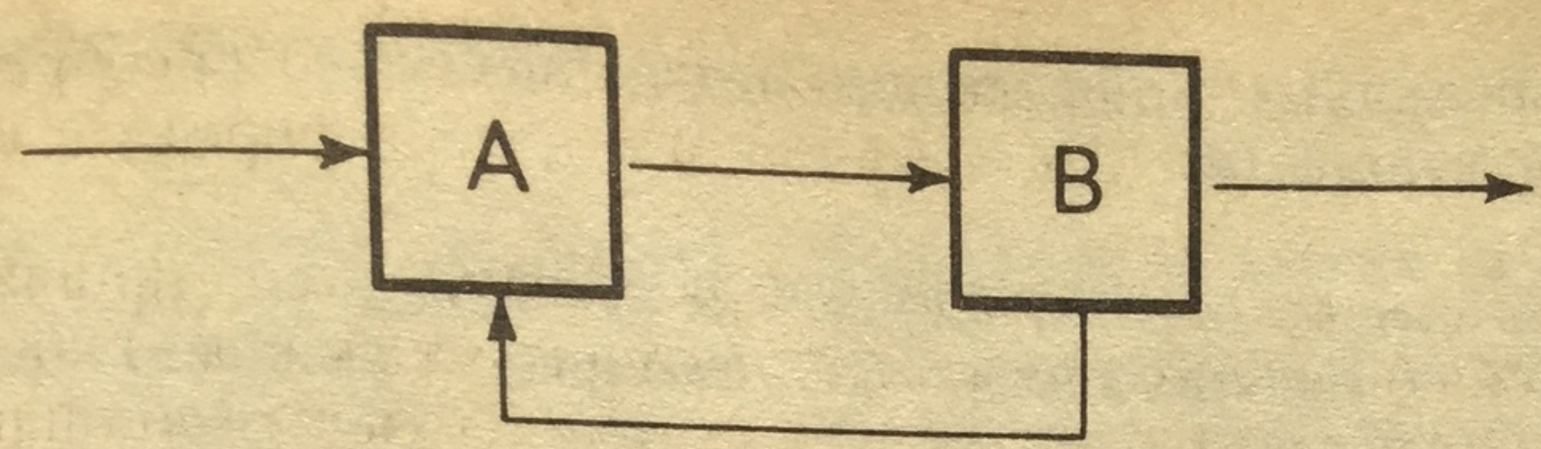



Рис. 20

нее «работавшую» совокупность нейронов). Однако шесть не равно тринадцати ($6 \neq 13$); следовательно, ответ пока не найден. Говорят: произошло рассогласование, установлено несоответствие полученного ответа долженствующему ($6 \neq 13$); обратная информация снова попадает в ячейку *А*, наступает новый этап проб, подгонки: искомое число $x$ должно быть больше 2; пусть $x=3$.

Так возникает второй цикл проб, причем и на этот раз обратная связь подает сигнал в ту же ячейку *А* ($13=13$); так наконец подтверждается, что найдено верное решение: $3 \cdot 7-8=13$.

Несравненная сложность решения деформированного задания очевидна. Деформированное упражнение по форме содержит столько же знаков, что и исходное, но оно придает ходу мыслительных операций новое качество: превращая простое в сложное, оно поневоле включает в процесс решения специальные механизмы мозга по самоконтролю результатов.

Стало быть, для постижения сущности даже простейшего правила отнюдь недостаточно решать как можно больше однообразных примеров только на одно правило (как это часто делается!), а надо специально тренировать мышление путем выполнения укрупненной группы родственных упражнений, имеющих общие логические элементы, облегчающие переходы от одного элемента к другому.

Известно, что опытный учитель добивается успеха с помощью филигранных деталей урока, эффективных и испытанных на деле конкретных приемов и видов упражнений, т. е. рассчитанной технологией урока.

Приведем итоги 10-минутного теста на простановку пропущенных чисел и знаков, проведенного 31 октября 1978 г. в экспериментальной школе № 82 Ногинского района Московской области (работу под наблюдением С. А. Жирковой выполняли в экспериментальных классах 61 человек, в контрольных — 58).

В нашем эксперименте был обнаружен следующий неожиданный факт: если предлагались тесты из обычных упражнений, то различие в развитии учащихся экспериментальных и контрольных классов было трудно установить. А вот тест на решение

деформированных упражнений четко выявлял это различие в развитии учащихся.

| Примеры вида: | Не выполнили, % учащихся Эксперим. кл. | Контр. кл. |
|---|---|---|
| 2+1= | 3,2 | 3,6 |
| 4—2= | 6,4 | 12,8 |
| □+3=4 | 6,4 | 12,8 |
| 1△2=3 | 1,5 | 26,7 |
| 1△2= | 9,9 | 31,8 |
| В среднем | 6,9 | 14,6 |

Психологическое явление обратимости ассоциаций имеет ближайшее отношение к логической операции «обращение суждений», которое выступает как один из основных приемов укрупнения дидактических единиц.

Обращение суждений имеет место при преобразовании прямой теоремы (задачи, функции) в обратную теорему (задачу, функцию).

В «Логическом словаре» Н. И. Кондакова (М., 1971) дается следующее определение понятия «обращение»: «Обращение суждения — такая логическая операция, когда из данного суждения образуется новое суждение, в котором субъектом становится предикат исходного суждения, а предикатом — субъект исходного суждения».

Например, дано истинное суждение: «Все планеты являются небесными телами». В результате обращения получаем также истинное суждение: «Некоторые небесные тела являются планетами».

Обращение суждения чаще всего встречается при составлении так называемого логического квадрата, т. е. четверки теорем. Рассмотрим простейший пример.

*Прямая теорема:*

$a \rightarrow b$.

Если каждое слагаемое делится на 3, то сумма делится на 3. (Истинное высказывание.)

$$6+9+15=30.$$

В самом деле, каждое из трех слагаемых делится на 3; сумма этих слагаемых (30) тоже делится на 3.

*Обратная теорема:*

$a \leftarrow b$.

Если сумма делится на 3, то и каждое слагаемое делится на 3. (Ложное высказывание).

$$27=5+8+14.$$

Сумма трех слагаемых ($5+8+14=27$) делится без остатка на 3: $27:3=9$. Но отсюда вовсе не следует, что каждое слагаемое будет делиться на 3. И действительно: 5 не делится на 3; 8 не делится на 3.

*Противоположная теорема:*

$\bar{a} \rightarrow \bar{b}$.

Если каждое слагаемое не делится на 3, то и сумма не делится на 3. (Ложное высказывание.)

$5+8+14=27$.

Все слагаемые (5, 8, 14) не делятся на 3; однако сумма их (27) делится на 3.

*Теорема, обратная противоположной:*

$\bar{a} \leftarrow \bar{b}$.

Если сумма не делится на 3, то не каждое слагемое делится на 3 (или: некоторые слагаемые не делятся на 3). (Истинное высказывание.)

$28=6+8+14$.

Сумма трех слагаемых (28) не делится на 3. Значит, хотя бы одно из слагаемых не делится на 3 (например, 8).

В логике переход от высказывания $a \rightarrow b$ к высказыванию $a \leftarrow b$ называется *обращением высказывания,* при котором посылка и заключение теоремы меняются местами.

Чтобы получить из прямой теоремы ($a \rightarrow b$) противоположную ($\bar{a} \rightarrow \bar{b}$), мы сохраняем связку, но заменяем высказывания их отрицаниями.

В практике обучения математике нет необходимости каждый раз составлять (и тем более доказывать) четверку теорем. Но умение отличать эти формы суждений друг от друга — важное логическое приобретение ума.

Мы видели выше, что реализация в мыслительных процессах явления обратимости приводит к дидактической идее совместного (одновременного) изучения контрастных в чем-то понятий на одних и тех же уроках. В связи с этим важно отметить глубокую физиологическую обоснованность явления, характеризуемого психологическим понятием обратимости. О физиологической природе прямых и обратных связей в мышлении говорит И. П. Павлов в одной из своих незавершенных работ. В ней сказано, что если два нервных пункта связаны, объединены, то нервные процессы двигаются, идут между ними в обоих направлениях. Поучительно отметить, что в последовавших затем исследованиях П. К. Анохин уточнил это явление: «Извлечение прошлого опыта из памяти происходит по той же нейрохимической трассе, по которой он был зафиксирован в момент приобретения опыта»[1].

Вспомним коренные отличия условного рефлекса от безусловного. Если в рот собаки попадает, скажем, мясной порошок, то выделяется слюна. Такое явление называется безусловным рефлексом («мясо—слюна»).

И. П. Павлов создал новый метод изучения деятельности головного мозга — метод условного рефлекса. В обычных условиях собака не выделяет слюну на световое раздражение. Лишь специальными приемами при определенных условиях добиваются

[1] *Анохин П. К.* Общая теория функциональных систем организма//Прогресс биологической и медицинской кибернетики. М., 1974. С. 95.

возникновения связи «свет—слюна» у собаки. Такую реакцию и называют условным рефлексом.

И. П. Павлов, описывая историю открытия условных рефлексов, указывал, что он вначале шел примерно таким же путем, каким и до сих пор преимущественно пользуются учителя в обучении детей. Он брал раздражитель одной интенсивности (скажем, свет) и проводил серию совмещений: сначала условный раздражитель (свет) — потом безусловный раздражитель (мясной порошок) — результат (слюна). Повторив несколько раз это сочетание, он неожиданно опускал среднее звено (мясо).

Ожидание условного рефлекса «свет—слюна» обычно не оправдывалось, несмотря на повторение такого опыта десятки раз: собака не выделяла слюну на световое раздражение.

Решение данной задачи великим физиологом было, подобно вышибанию клина клином, парадоксальным: «Если простую задачу животное решает трудно, то, может быть, сложную оно решит легче?» Отказавшись от первой тактики повторения одного и того же раздражителя, он стал предъявлять животному двойную задачу, противопоставляя исходную задачу видоизмененной: а) «сильный свет — кормление — выделение слюны»; б) «слабый свет — нет кормления — нет слюны».

Повторив несколько раз такой усложненный вариант задания (два разных стимула — две разные реакции), он неожиданно опускал кормление в пункте «а»: рефлекс в этом случае легко появлялся: «сильный свет — выделение слюны».

Итак, животному легче реагировать на сильный свет, чем «вообще на свет», как было в первом варианте опытов, ибо в этом случае срабатывает функциональный механизм сравнения интенсивностей одного качества (сильный свет противопоставляется слабому свету).

Так был открыт метод перемежающегося противопоставления контрастных раздражителей как средство выработки условных рефлексов, успешно перенесенный затем педагогами в школу как основа основ рационального обучения.

Поучительно здесь следующее. Противопоставление комбинаций раздражителей, означающих программы противоположных в чем-то действий, представляет собой самое распространенное явление в переработке информации животными, как на низших, так и на высших ступенях эволюционной лестницы: рыб можно научить отличать вертикальную черту от горизонтальной, крыс — различать левое и правое направления и т. п.

Интересен в этом отношении следующий опыт: дрессировкой можно добиться того, чтобы дельфины принимали команды, основанные на жестикуляции руками. Дельфины способны точно выполнять команды с противоположным логическим содержанием, например, такие: «сеть — в корзину!», «корзину — в сеть!»

Понятно отсюда, почему обучение по системе укрупнения зна-

ний (читай: на базе противопоставления раздражителей) равно облегчает усвоение знаний всеми учащимися (как с замедленной, так и с быстрой реакцией).

Об этом И. П. Павлов писал так: «Как же происходит специализация условного раздражителя, дифференцирование внешних агентов? Сначала нам казалось, что здесь имеют место два приема. Один — это только многократное повторение определенного агента в качестве условного раздражителя с постоянным подкреплением безусловным рефлексом. Другой — перемежающееся противопоставление этого определенного... условного раздражителя с близким к нему агентом. *В настоящее время мы склонны признавать действительность только последнего приема.*

С одной стороны, мы имеем условные раздражители, повторенные тысячекратно и которые, однако, через это одно не делались узкоспециализированными. С другой — было замечено, что даже однократная проба каждого из родственных агентов без подкрепления и редкое (через дни и даже недели) такое же (т. е. без подкрепления) применение ряда их (каждый раз все нового агента), при повторениях с подкреплением условного раздражителя, ведет, однако, к специализированию его»[1].

Важно здесь дать следующее пояснение. Среди учителей и методистов распространено неточное толкование павловского понятия «перемежающееся противопоставление» раздражителей. Если, скажем, на одном и том же уроке после решения уравнения учитель предлагает задание на построение треугольника, то в этом иные видят осуществление... противопоставления (?!).

Соответственно, даже возникла идея растянутого «непрерывного повторения», когда логическая изолированность таких упражнений выдается за применение будто бы принципа «перемежающегося противопоставления» (уравнению будто бы «противопоставляется» геометрическая фигура). Нет в дидактике более коварного заблуждения!

В самом деле, в опытах И. П. Павлова по созданию условного рефлекса после раздражения сильным *светом* совершается через несколько секунд раздражение слабым *светом*. В обоих случаях — свет, т. е. раздражения одной природы, лишь различающиеся по интенсивности. Здесь это — главное. Аналогично сказанному при переходе от $2+3=5$ к $5-2=3$ общность чисел (5, 2, 3) подобна общности светового раздражения в опытах Павлова. При переходе же от уравнения к треугольнику вообще нет общего раздражителя; стало быть, нет и противопоставления! Эту-то суть дела и не понимают многие авторы программ и учебников.

Такое заблуждение далеко не безвредно: оно оборачивается

[1] *Павлов И. П.* Полн. собр. соч. Т. III. Ч. 2. 1951. С. 129. (Курсив наш.—*П. Э.*).

излишней тратой учебного времени, ибо приводит к рыхлости (неустойчивости) знаний.

Данные физиологии убедительно говорят о том, что *противопоставление* относится поистине к *основным условиям экономного мышления*.

В известных границах допустимо, например, рассматривать предъявление обратной задачи ($5+\square=9$ или $9-5=\square$) после разбора соответствующей прямой задачи ($5+4=\square$) как некоторый контрастный раздражитель нервной системы по отношению к предшествовавшей задаче.

Естественно при этом ожидать, что обратная задача будет решена лучше тогда, когда она попадет в фазу наибольшей чувствительности нервной системы к противоположному по качеству раздражителю. Таковое случится при условии, когда обратная задача рассматривается вслед за прямой без большого промежутка времени между ними, на одном уроке, в пределах не более 20—30 мин, т. е. в пределах функционирования оперативной памяти (если же речь идет о фиксации информации, то обе задачи должны быть напечатаны, написаны рядом в параллельных колонках одной страницы, изображены на одном рисунке или в одной граф-схеме).

Из практики обучения известно, что одним из наиболее распространенных типов ошибок в математике является ошибка подмены понятия противоположным ему понятием; вместо увеличения числа (умножения) уменьшают его (делят); при составлении уравнения по условию задачи вместо знака «+» пишут знак «—» и т. п. Чтобы преодолеть такие ошибочные «ассоциации смежности», учителя и методисты нередко идут по пути разведения во времени на почтительное расстояние взаимно-обратных задач, т. е. по пути, отвергнутому И. П. Павловым.

Советские психологи, опираясь на учение И. П. Павлова, отмечают целесообразность использования метода противопоставления при обучении в школе (Ю. А. Самарин, Н. А. Менчинская, Е. Н. Кабанова-Меллер).

К сожалению, авторы методических работ большей частью исходят из того, что взаимно-обратные понятия и операции разъясняются детям не одновременно, не совместно, а раздельно, в разное время. Такая точка зрения до недавнего времени была господствующей, ибо именно в подобном духе были составлены учебники, программы и приспособленные к ним методические пособия.

Одновременное изучение взаимно-обратных действий в младших классах в свое время осуществил Л. Н. Толстой в организованной им школе в Ясной Поляне. Толстой считал, что учителю кажется легким простое и элементарное, в то время как для детей только сложное и живое кажется легким.

При одновременном изучении взаимно-обратных действий

(операций, задач, теорем, функций и т. п.) значительно экономится время по сравнению с раздельным изучением. В связи с этим полезно добиваться понимания учащимися двойных определений и правил. Например:

1. а) Взаимно-простыми числами называются такие натуральные числа, которые не имеют общего для всех их множителя, отличного от единицы (например, 5, 12, 15).

б) Взаимно-составными числами называются такие натуральные числа, которые имеют общий для всех множитель, отличный от единицы (например, 3, 12, 15).

2. От перестановки $\frac{\text{слагаемых}}{\text{сомножителей}}$ $\frac{\text{сумма}}{\text{произведение}}$

не изменяется $(a+b=b+a)$.

3. Чтобы $\frac{\text{умножить}}{\text{разделить}}$ десятичную дробь на 100, достаточно перенести запятую на два знака $\frac{\text{вправо}}{\text{влево}}$:

$$7{,}084 \cdot 100 = 708{,}4,$$
$$708{,}4 : 100 = 7{,}084 \text{ и т. п.}$$

При обсуждении одного из наших докладов ученый-коллега никак не мог понять одного: как можно научить читать «двухэтажные» совмещенные записи правил, широко используемые в наших экспериментальных учебниках?

А делается это очень просто: Миша читает, скажем, правило умножения на 100, захватывая слова, напечатанные над чертой; после него Петя читает сопряженное правило деления на 100, захватывая слова, напечатанные под чертой. Конфуз же получился потому, что коллега не видел подобных диалогов на реальном уроке в экспериментальном классе...

И. Е. Репин как-то сказал: «Там, где начинается чуть-чуть, начинается искусство». Подобно этому успех учителя-мастера обеспечивается филигранной отработкой им «мелочей» (технологических деталей урока): интонаций речи, расположения записей и рисунков, толщины линий, матричного расположения задач или примеров и т. п. *Технологическое усовершенствование процесса обучения* — это поистине нетронутое поле интересных находок для каждого учителя.

Приведем один пример. Пусть речь идет об умножении на трехзначные числа с нулем в середине. В учебниках обычно ограничиваются примерами прямой структуры; полагают, что чем больше их решено, тем лучше:

$$\begin{array}{r} 273 \\ \times\ 101 \\ \hline 273 \\ 273\phantom{0} \\ \hline 27573 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 189 \\ \times\ 403 \\ \hline 567 \\ 756\phantom{0} \\ \hline 76167 \end{array}$$

Между тем противопоставление таких обычных примеров деформированным примерам приносит успех делу:

$$\begin{array}{r} 314 \\ \square\square\square \\ \hline 314 \\ \square\square 8\phantom{0} \\ \hline \square\square\square\square\square \end{array}$$

Восстаназливая пропущенные цифры в таком примере, учащиеся гораздо быстрее начинают понимать сущность взаимнообратных связей: «нуль в середине множителя — сдвиг на одну цифру влево» (и обратно).

Советский психолог В. А. Крутецкий в своем известном исследовании формирования математических способностей считает основными способностями к усвоению математики следующие: 1) способность к быстрому и широкому обобщению математического материала; 2) способность к быстрому «свертыванию», сокращению процесса рассуждения и системы соответствующих действий при решении математических задач; 3) способность к свободному и быстрому переключению на обратный ход мысли в процессе изучения математического материала.

Эти три вида способностей тесно связаны друг с другом. Если, например, ученик умеет легко переходить от решения арифметической задачи путем отдельных действий к решению посредством формулы, то здесь проявляется способность как к обобщению, так и к свертыванию процесса рассуждения. Однако, как это следует из наших исследований, способность переключения мысли с прямого хода на обратный является, по-видимому, определяющим, исходным элементом в структуре математических способностей. Известно много позитивных примеров, когда именно наличие упражнений с обратным построением содействовало улучшению качества знаний по математике.

В системе УДЕ одним из основных приемов, используемых почти на каждом уроке, выступает самостоятельное составление учащимися обратных задач и их решение. В общепринятой же системе обучения подобные приемы, как правило, не находят места: преобразование решенной задачи в обратную встречается не чаще чем на одном уроке из десяти.

Мы провели сравнение успешности решения учащимися экспериментальных и контрольных вторых классов следующей задачи: «Дочери 7 лет. Возраст дочери составляет $^1/_6$ возраста матери. Сколько лет матери?»

Известно, что такая задача считается одной из трудных для II класса. Она была выбрана нами для того, чтобы получить дисперсию (разброс) количественных результатов по параметру ус-

пешности ее решения. Контрольную проводили в апреле 1979 г. Ее писали 98 учащихся экспериментальных классов и 139 учащихся контрольных классов. И вот итог: если в экспериментальных классах 87% учащихся дали верные ответы, то в контрольных — лишь 58%.

Данный факт показателен, ибо он представляет результат массовой проверки знаний. Значительное превосходство экспериментальных классов над контрольными объясняется в данном случае тем, что в первых почти каждую задачу по данной теме решали в паре с обратной ей в преобразованиях, в переходах объекта «в свое другое», как говорят философы. В данной контрольной сопоставление проведено только по успешности решения одной задачи, которой не предшествовала в этой контрольной какая-нибудь взаимосвязанная с ней задача. Тем не менее она была значительно лучше решена в экспериментальных классах.

Причину этого явления мы видим в том, что задача, познаваемая как элемент целостной совокупности упражнений, усваивается лучше, чем в тех случаях, когда она, как это делается в обычной практике, рассматривается в изоляции от обратных ей задач.

Сравнительное наблюдение за экспериментальными и контрольными классами показывает, что переход от традиционной методики решения разрозненных задач, не связанных информационно друг с другом, к методике УДЕ не вызывает психологического сопротивления учащихся. Это объясняется тем, что создание из отдельных представлений системы воспринимается всегда как естественное развитие знаний; можно сказать и так: механизмы мышления, приспособленные к УДЕ, как бы ждут случая освоения крупных порций знания, они как бы всегда наготове.

Беда состоит лишь в том, что традиционная система обучения, метафизическая в своих установках, принудительно держит мышление воспитуемых на нижнем уровне — на уровне элементаризма.

Мы имели возможность наблюдать соответствующие факты. Во время болезни или смены своих учителей учащиеся экспериментальных классов вынуждены были попадать в условия традиционной, общепринятой методики учителей, не проводивших ранее экспериментального обучения, когда обратные задачи не составляются, не решаются деформированные упражнения, т. е. на уроке не применяются привычные для учащихся приемы УДЕ. В этих условиях учащиеся экспериментальных классов явно ощущают часто не осознаваемый ими дискомфорт.

Были нередки случаи, когда наиболее сильные учащиеся сами составляли обратные задачи или аналогичные задачи на основе решенной, хотя новый учитель этого и не требовал от них. Такое явление можно уподобить тому, что бывает в случае резкой остановки мыслительных процессов, ориентированных на самонара-

щивание клубка связей, сгустка ассоциаций, для которого упражнение из книги являлось всегда «затравкой», толчком к саморазвитию каскада собственных мыслей.

Проблема обратной задачи — это как бы критерий внедряемости УДЕ в практику традиционного обучения. Исключив обратную задачу из программ и учебников, мы лишаем ученика главного алгоритма целостного познания любой математической информации. Понятно отсюда, что борьба различных направлений диалектической мысли в области методики математики обретает неожиданную форму борьбы вокруг понятия «обратная задача».

В новых программах по математике для трехлетней школы, утвержденных Минпросом РСФСР в 1985 г., и в самом деле нет вообще ни понятия обратной задачи, ни требований самостоятельного составления задач учащимися. В тексте этих программ из некоторых троек взаимно-обратных задач зачастую опущена одна из них (например, отсутствуют задачи на разностное сравнение, на кратное сравнение).

В связи с этим нельзя не обратить внимания на статью С. Е. Царевой «Проверка решения и формирование самоконтроля учащихся» (Начальная школа. 1984. № 2).

Прием составления обратной задачи в зависимости от учебной ситуации, складывающейся на уроке, выполняет на уроке несколько частных дидактических функций: а) содействует совместному изучению взаимно-обратных действий, б) развивает умение понимать связи между суждениями и умозаключениями, в) помогает школьнику осваивать самостоятельно грамматические и логические формы, г) развивает навыки самоконтроля и т. п.

С. Е. Царева же в упомянутой статье рассматривает не все эти дидактические функции, присущие такому виду работы, как составление и решение обратной задачи, а лишь одну, выражающуюся в форме контроля ответа, полученного при решении исходной задачи. Перевернув таким образом проблему с ног на голову, С. Е. Царева, естественно, приходит к ошибочным рекомендациям. Так, она пишет: «Самостоятельное применение этого способа (составление обратной задачи.— *П. Э*) в качестве средства контроля для учащихся вряд ли приемлемо» (с. 33). Такое некомпетентное мнение возникло у автора по единственной причине: в статье нет ссылок на практику, на свой или чужой опыт по конкретному испытанию метода составления обратной задачи. Попытка решать методические проблемы путем абстрактного теоретизирования, чисто логически, умозрительно, без коррекции живой жизнью школы всегда приводит к ущербным выводам.

С. Е. Царева пишет далее о необходимости контроля... «за еще не выполненными, а только планируемыми действиями» (!?) (с. 33). Спрашивается: как же можно проверять то, чего еще нет,

когда задача еще не решена и ответ не получен? Вот к чему приводит попытка «решить» методическую проблему, лишь абстрактно рассуждая о ней.

Обсуждая вопрос об обратных задачах, нелишне учесть конкретные высказывания педагогов об эффективности этого приема. Так, учительница И. Улицкая писала в «Правде» (1971. 9 мая) следующее: «Усиленное решение обратных задач... увлекает детей, всех без исключения, мысль их работает активно и радостно». «Очень эффективно параллельное рассмотрение прямых и обратных задач»— так утверждает доктор психологических наук Л. М. Фридман в книге «Психолого-педагогические основы обучения математике в школе» (М., 1983). Киевская учительница Л. С. Лазоренко писала в журнале «Начальная школа» (1973. № 9) следующее: «Помогает обучению составление обратных задач... Это стало любимым занятием детей...»

Изложенное выше показывает, что решение групп взаимнообратных задач действительно является как бы нервом обучения математике. Поэтому есть все основания учитывать это обстоятельство при построении урока, учебника, программы по математике.

Большой пользой для детей обернется достойная оценка учителями и методистами такого общедоступного, чрезвычайно продуктивного и многократно испытанного приема сознательного освоения математических знаний, как составление обратной задачи.

## § 8. МАТРИЧНОЕ И ГРАФ-СХЕМНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ

Важнейший компонент учебного материала — упражнения. В упражнениях необходимо четко выделять прежде всего содержательную характеристику, т. е. их соответствие с научным знанием. Из-за неразработанности проблемы необходимого минимума разнообразия упражнений авторы учебников и методических руководств не могут преодолеть избыточного числа однообразных упражнений.

В данном параграфе мы рассмотрим только главную дидактическую функцию упражнений — закрепление знаний.

Принято считать, что для прочности усвоения учащийся должен выполнить возможно большее число однотипных упражнений. Достойно внимания следующее: в балансе расхода времени на основные компоненты упражнения, скажем, в VIII классе выполнение четырех действий над целыми числами должно занимать как можно меньше времени (ибо такая операция уже усвоена прочно на уроках арифметики в I—V классах и хранится в памяти

| | Слева (черные) | Справа (белые) | Всего |
|---|---|---|---|
| Сверху (большие) | ● ● | ○ | 2+1=3 |
| Внизу (малые) | ● ● ● | ○○○○ | 3+4=7 |
| Всего | 2+3=5 | 1+4=5 | 3+7=<br>5+5=10 |

**Рис. 21**

на уровне автоматизированного результата в ходе тысячекратного повторения в предыдущие годы обучения).

Одним из мало используемых средств укрупненного освоения знаний в школе служит способ матричного (табличного) представления знаний. Таблица упражнений «незаметным образом» (в пределах самого упражнения!) увеличивает время для освоения дополнительной структурной (не числовой) информации.

Матрица представляет собой особый учебный прием, позволяющий обучающемуся проникнуть во внутреннюю взаимосвязь числовых и иных результатов. Простейшими матрицами являются четверки примеров на сложение и умножение, например:

3+2=5,
2+3=5.

3·2= ,
2·3= .

5—2=3,
5—3=2.

□ : 2=3,
□ : 3=2.

Уже в I классе поучительно познакомиться с матрицами на нахождение суммы четырех слагаемых двумя способами (рис. 21).

На основе данной матрицы проводится содержательная беседа с большой логической нагрузкой. Так, изображенные фигуры можно классифицировать двояко: в плане пропедевтики системы координат (слева — справа; вверху — внизу) и в плане сравнения по величине (большие — малые), по цвету (черные — белые). Концовкой такой беседы может быть, например, следующий диалог: «Сколько фигур слева? (5.) Справа? (5.) Сколько всего?

| | Короткая (левая) | Длинная (правая) |
|---|---|---|
| Широкая (верхняя) | • • • • • • • • • • | • • • • • • • • • • • • • • • • |
| Узкая (нижняя) | • • • • | • • • • • • • • |

Рис. 22

(5+5=10.) Сколько фигур в верхнем ряду? (3.) В нижнем ряду? (7.) Сколько всего? (7+3=10.) Опять 10!» Для малыша такое явление сохранения суммы представляется удивительным.

Рассмотрим таблицу на рис. 22. На основе этой таблицы уже в I классе удобно проводить беседу по пропедевтике координат (ориентировка на плоскости), ибо рисунок позволяет сравнивать пары понятий: левая — правая, верхняя — нижняя. Данная таблица позволяет также увязывать пространственную информацию (правая — левая) с информацией меры (широкая — узкая, короткая — длинная). В беседе со школьником по этой матрице следует задавать противоположные по содержанию вопросы. *Вопрос:* какая лента нарисована в правой нижней клетке? *Ответ:* длинная и узкая. *Вопрос:* где нарисована короткая и широкая лента? *Ответ:* в левой верхней клетке.

Табличные упражнения удобны для быстрого решения примеров, информационно связанных друг с другом (рис. 23). Так, например, заполняя клетки таблицы, школьники должны обратить внимание на совпадение парных сумм, например:

35+47=45+37=82.

Ученик должен объяснить, почему получились равные суммы. Равные суммы в таблице отмечены общим знаком.

Матричные задания удобны и при изучении так называемого внетабличного умножения в пределах 100 (и соответствующих случаев в преде-

| | $a+b$ | | | |
|---|---|---|---|---|
| $a$ \ $b$ | 43 | 45 | 47 | 49 |
| 33 | | ▢ | | ◇ |
| 35 | ▢ | | (82) | |
| 37 | | (82) | | ▽ |
| 39 | ◇ | | ▽ | |

Рис. 23

| | $a \cdot b$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a$ \ $b$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 12 | | | | | | | |
| 120 | | | | | | | |
| 13 | | | | | | | |
| 130 | | | | | | | |
| 14 | | | | | 84 | | |
| 140 | | | | | 840 | | |
| 15 | | 45 | | | | | |
| 150 | | 450 | | | | | |
| 16 | | | | | | | |
| 160 | | | | | | | |

Рис. 24

лах 1000) (рис. 24).

Пусть вычислено: 14 · 6=84. Этот результат, сохраняющийся в оперативной памяти, может быть тут же использован при решении примера с теми же цифрами, но с выходом в концентр «тысяча»:

140 · 6=840.

В виде таблицы удобно предложить упражнения на нахождение части числа (рис. 25).

Учитель может повести учащихся и в глубь вопроса, например:

$^1/_6$ от 72 равна 12;
$^1/_3$ от 72 равна 24.

24 больше 12 в 2 раза. Почему? По-видимому, потому, что $^1/_3$ больше $^1/_6$ также в 2 раза. И т. п.

В современной дидактике особая роль отводится тому, чтобы усвоение знаний осуществлялось на нескольких уровнях (кодах) одновременно. Такие приемы обучения, как переход от словесного правила к соответствующему рисунку или сравнение числового соотношения с буквенной формулой, эффективны потому, что здесь один метод (прием) обучения подкрепляет другой метод (прием) объяснения одного и того же знания.

| | Найти $\frac{1}{a}$ от $b$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{a}$ \ $b$ | 24 | 48 | 72 | 96 | | | |
| $\frac{1}{2}$ | | | | | | | |
| $\frac{1}{3}$ | | | 24 | | | | |
| $\frac{1}{4}$ | | | | | | | |
| $\frac{1}{6}$ | | | 12 | | | | |
| $\frac{1}{8}$ | | | | | | | |
| — | | | | | | | |

**Рис. 25**

В нашем учебнике математики для I класса намеренно сделан акцент на обогащение числовых соотношений с помощью соответствующих рисунков. Так, например, при изучении числа 4 дети знакомятся с названиями четырех сторон света (север — юг, восток — запад), при изучении числа 7 — с названиями семи цветов радуги, семи дней недели, названий семи нот и т. п.

Характерной методической особенностью нашего учебника для I класса является также использование таких рисунков, в которых сравниваются длины отрезков (рис. 26). Так, на основе рисунка учащиеся рассказывают всю известную им «математику в пределах 6»: если к 4 *прибавить* 2 — получится 6; если от 6 *отнять* 2 — получится 4; 6 *больше* 4 на 2; 4 *меньше* 6 на 2; 4 *увеличить* на 2 — получится 6; 6 *уменьшить* на 2 — получится 4; 6

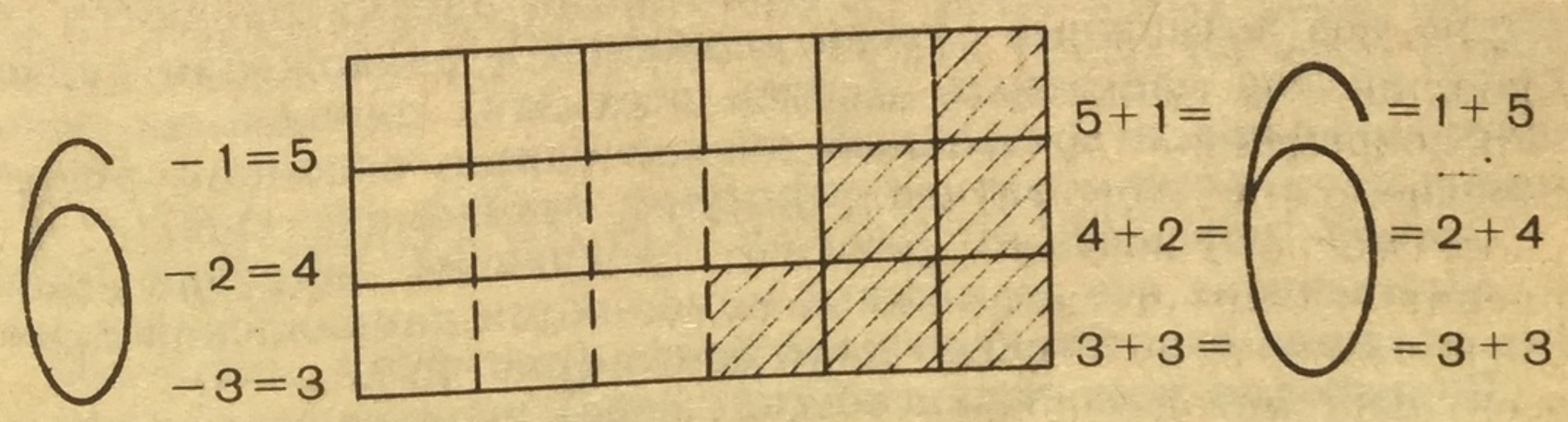



**Рис. 26**

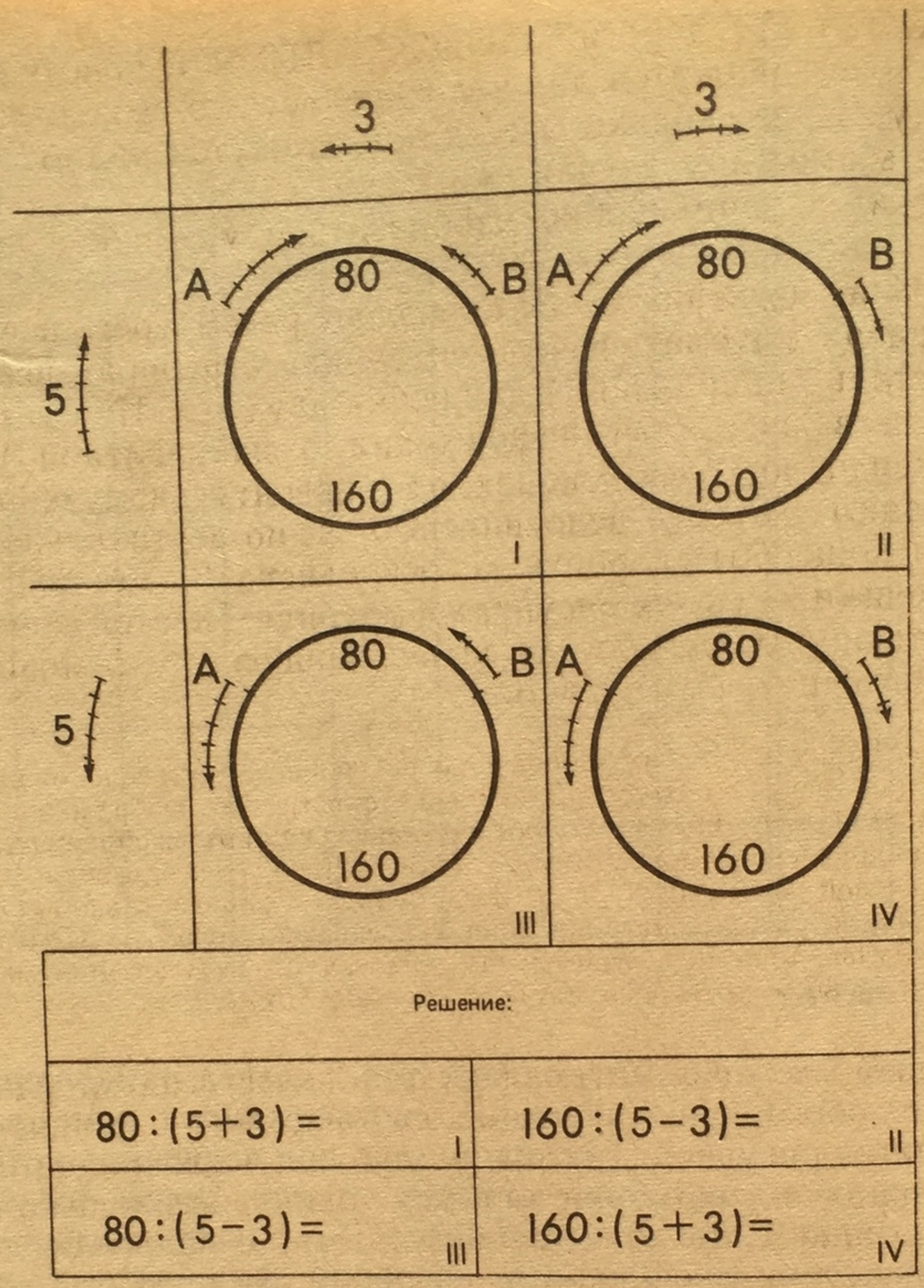



**Рис. 27**

*больше* 4 на 2 и т. д. Овладение содержанием данного комплекса суждений становится возможным благодаря подсознательному сравнению учеником чисел на основе зрительного сопоставления длины двух отрезков.

При монографическом изучении числа рассматриваются совместно все возможные случаи сложения и разложения данного числа на два слагаемых. Запись всех этих случаев на основе одного рисунка и зрительный анализ такого сложного рисунка помогают и в этом случае усвоению изучаемой темы.

Весьма поучительно решение следующей четверки задач, исчерпывающих все возможные комбинации направлений движения двух тел относительно друг друга (рис. 27).

Вопрос для всех задач общий: через сколько секунд *A* и *B* окажутся рядом? Итак, дана задача: «Между двумя точками *A*

и *В* имеются две дороги, длинная — 160 м и короткая — 80 м. Из этих точек движутся два велосипедиста со скоростями 5 и 3 м в секунду. Через сколько секунд они окажутся рядом? (Рассмотреть все возможные случаи.)»

Решение задачи удобно изобразить в матрице с двумя *входами*.

Подобная четверка задач позволяет рассмотреть исчерпывающим образом математическую ситуацию, перебирая все возможные сочетания направлений движения двух тел. При таком оформлении четверки задач информация о направлении движения передается на нескольких кодах: по горизонтальному входу матрицы показаны скорости велосипедиста *А*, по вертикальному входу матрицы показаны скорости велосипедиста *В*. Эти же скорости изображены и на самих рисунках в матрице. По этой схеме удобно проводить обучающую беседу, позволяющую добыть дополнительную информацию об изучаемом.

*Вопрос.* В каких клетках изображено движение в противоположных направлениях («навстречу»)? *Ответ.* Движение «навстречу» изображено в клетках правой диагонали (I и IV). *Вопрос.* В каких клетках изображено движение в одном направлении («вдогонку»)? *Ответ.* Движение вдогонку изображено в клетках левой диагонали (II и III). *Вопрос.* Сравните задачи (II и III). В каком случае быстрее нагонит один велосипедист другого? Почему? *Ответ.* В первом случае, так как в этом случае первоначальное расстояние между велосипедистами — 80 м, во втором случае — больше (160 м).

Мы описали беседу, основанную на качественных сравнениях: (I—II), (V—III), (I—IV). Однако в таком анализе можно пойти значительно дальше, проникая в глубинные связи, которые при обычной практике обучения на основе одинарных задач являются для мышления школьника недоступными. В процессе дополнительного обсуждения можно извлечь новые сведения.

*Вопрос.* Какова скорость сближения велосипедистов в (II) и (III) случаях? *Ответ.* Скорости сближения равные, так как в обоих случаях движение совершается вдогонку. Скорость сближения здесь равна $5+3=8$ (м) за каждую секунду. *Вопрос.* Через сколько секунд произойдет первая встреча в первой и четвертой задачах? *Ответ.* $80:2=40$ (с); $160:2=80$ (с). *Вопрос.* Через сколько секунд будут происходить последующие встречи? Через различное время или одно и то же время? Почему? *Ответ.* После первой встречи условия задач оказываются одинаковыми: в обоих случаях быстрейший должен нагнать медленного велосипедиста через $(160+80):2=120$ (с). *Вопрос.* Почему же здесь расстояние выросло до $160+80=240$ (м)? *Ответ.* Потому что между данными двумя велосипедистами в момент встречи расстояние равно нулю (0 метров). Однако при дальнейшем движении между быстрейшим и медленным оказывается весь круговой путь $(160+80=240)$. *Вопрос.* Через сколько секунд будут происходить последующие встречи в I и IV задачах? *Ответ.* $(160+80):(5+3)=$ $=240:8=30$ (с).

Мы видим, что решение сматрицированной задачи, состоящей из четырех попарно связанных случаев, становится особым видом укрупненного упражнения, т. е. некоторым сочинением на матема-

тическую тему «Задачи на движение».

Пусть речь идет о решении следующей пары задач.

*Прямая задача:*

3, 5, 9, □.

Миша купил тетрадей по 3 коп. за штуку и ручку за 9 коп. Сколько стоит вся покупка?

*Обратная задача:*

3, □, 9, 24.

Миша купил несколько тетрадей по 3 коп. за штуку и ручку за 9 коп. Вся покупка стоит 24 коп. Сколько куплено тетрадей?

Удобно иногда изобразить решения обеих задач в общей граф-схеме решения (рис. 28). Здесь в совместной граф-схеме решение прямой задачи показано сплошными толстыми стрелками. Искомое число 24 (ответ прямой задачи) помещено в правом нижнем углу граф-схемы, внутри квадрата. (Рассуждения по схеме идут слева направо и сверху вниз.) Решение обратной задачи изображено тонкими штриховыми стрелками, направленными вверх и влево; искомое число в обратной задаче (3) помещено внутри треугольника в левом верхнем углу граф-схемы.

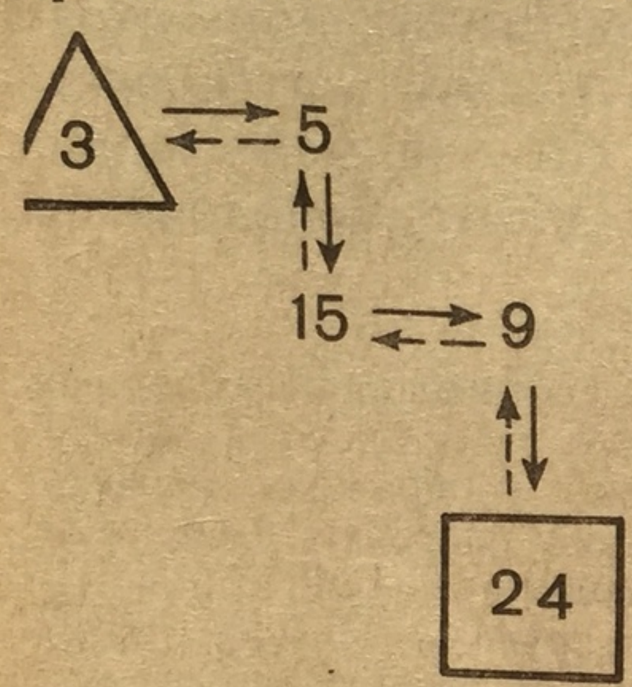



Рис. 28

В младших классах по такой граф-схеме, соединяющей числа, использованные в задаче, учащемуся удобно вести рассуждения: стрелки показывают последовательность появления этих чисел в рассуждениях. Этот прием особенно удобен при работе со слабыми учащимися, а также при устном выполнении решения по плакату или по схеме, изображенной на доске.

Граф-схемы привносят в обучение элемент наглядности, создавая пространственные (видимые) ассоциации между элементами схемы[1]. Так, при пользовании граф-схемой учителю можно управлять мыслительными операциями учащихся, указывая направления следования по схеме, симметричность тех или иных ячеек, крайние элементы граф-схемы (начало и конец рассуждения), отдаленность или близость тех или иных ячеек граф-схемы на пространстве листа (и, соответственно, удаленность или близость понятий или суждений в потоке речи, в цепи логических рассуждений), т. е. во времени проявления ассоциаций.

В школьных учебниках математики для I—V классов подавляющее большинство задач таковы, что в них ставится единственный вопрос и требуется найти зачастую один ответ (одно число). Например, даны в условии 4 числа, требуется найти одно число. В плане эффективного использования оперативной памяти такая практика представляется попросту неэкономной.

[1] Психологами обнаружено, что в процессе решения арифметических задач участвуют центры переработки пространственной информации в головном мозге.

Рассмотрим задачу (рис. 29): «Семья купила 30 кг картофеля по 20 коп. за килограмм и 5 кг капусты по 40 коп. за килограмм. Сколько всего уплатили за покупку?» (Решение представлено сплошными стрелками.)

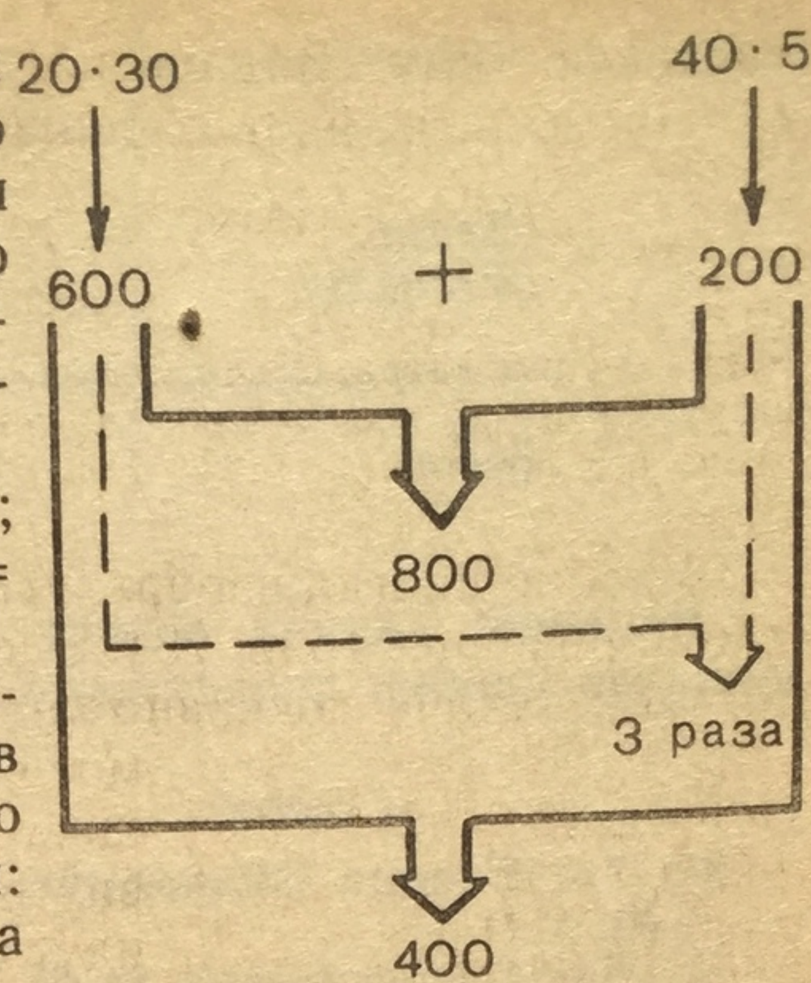


Рис. 29

*Решение:* 1) 20 · 30=6 (руб.); 2) 40 · 5=2 (руб.); 3) 6+2=8 (руб.).

Ту же задачу после решения учитель может дополнить, предложив ее уже не с одним вопросом, как это показано выше, а с тремя вопросами:

а) сколько всего уплатили за покупку?

(Сплошные стрелки.) 600+200=800 (коп.)=8 (руб.);

б) на сколько больше уплатили за картофель, чем за капусту?

(Сплошные стрелки.) 600—200=400 (коп.)=4 (руб.);

в) во сколько раз больше уплатили за картофель, чем за капусту?

(Штриховые стрелки.) 600:200=3 (раза).

Такое доращивание решений задачи с одним вопросом до задачи с тремя вопросами осуществляется дорисовыванием граф-схемы решения исходной задачи (здесь удобно использовать цветные мелки и фломастеры; анализ и обсуждение усложненной задачи осуществляются только устно, а граф-схемы строятся, как правило, учителем на доске).

В специальном исследовании были выявлены дидактические особенности табличного (матричного) представления знаний[1]. Так, можно построить матрицу изображений на уроках черчения, матрицу графиков функций на занятиях по математике, матрицу реакций (химия), матрицу видов энергии (физика) и т. п.

Интересно, что матричное представление числовой информации означает новую разновидность вычислительных задач.

Рассмотрим следующую задачу: «На футбольный матч приехали зрители из двух городов *А* и *Б*, всего на 7 машинах «Лада», причем 3 такие машины были из города *А*. Из города *Б* прибыло 6 машин «Москвич», всего же на матч прибыло из этих городов 24 машины. По скольку и каких машин прибыло из каждого города?»

Решение задачи сводится к восстановлению пропущенных (шести) чисел в следующей таблице:

[1] См.: *Эрднев Б.* Упражнения с матрицами при изучении функций//Активизация обучения математике в сельской школе. М., 1975.

| Машина | *А* | *Б* | Всего |
|---|---|---|---|
| «Лада» | 3 | □ | 7 |
| «Москвич» | □ | 6 | □ |
| Всего | □ | □ | 24 |

Решение задачи может быть выполнено двумя способами, которые удобно представить следующими граф-схемами:

*I способ:*

24—7=17 (всего «Москвичей»)
(I) ↓
17—6=11 («Москвичей» из *А*)
(II) ↓
3+11=14 (всего машин из *А*)
(III) ↓
24—14=10 (машин из *Б*)
(IV) ↓
10—6=4 («Лады» из *Б*)

*II способ:*

7—3=4 («Лады» из *Б*)
↓
4+6=10 (всего машин из *Б*)
↓
24—10=14 (машин из *А*)
↓
14—3=11 («Москвичей» из *А*)
↓
11+6=17 (всего «Москвичей»)

Граф-схемы обоих способов решения задачи можно представить, кратко указывая лишь результаты действий, так:

*I способ:*

24—7=17
↓
11
↓
14
↓
10
↓
4

*II способ:*

7—3=4
↓
10
↓
14
↓
11
↓
17

(Такой прием «полуписьменных вычислений» учителя часто применяют на устном счете в начальной школе.)

В качестве занимательных заданий иногда возможно в граф-схеме указывать направления связи чисел, вовлекаемых в операции. В подобных упражнениях сравнение соответствующих двух граф-схем становится источником возбуждения интереса к изучаемому. Из приведенного примера мы видим познавательную взаимосвязь двух технологических приемов изображения математической информации: с помощью матрицы (таблицы данных) и с помощью алгоритма (граф-схемы) операций.

Сравнение *табличного* и *граф-схемного* представления информации показывает как общность и сходство этих приемов обработки информации, так и их особенности.

Сравним таблицу и граф-схему с заполненными ячейками (элементами).

*Матрица условия задачи*

| | *А* | *Б* | |
|---|---|---|---|
| *Л* | 3 | □ | 7 |
| *М* | □ | 6 | □ |
| | □ | □ | 24 |

*Матрица решения задачи (ответ задачи):*

| | *А* | *Б* | Всего |
|---|---|---|---|
| *Л* | 3 | 4 | 7 |
| *М* | 11 | 6 | 17 |
| Всего | 14 | 10 | 24 |

$$\begin{array}{r} 7 \\ +\,17 \\ \hline 24 \end{array}$$

$14+10=24$

*Граф-схема решения:*

1) $24-7=17$
2) $17-6=11$ (I)
3) $3+11=14$ (II)

В матрице приведенной задачи содержится всего 9 чисел; этот набор взаимосвязанных чисел обладает особым свойством «самоконтролируемости». Например, общее число машин (24) должно получиться двумя способами: $7+17=24$ (по вертикали) и $14+10=24$ (по горизонтали).

Граф-схема решения — это жесткое «алгоритмическое предписание»: порядок действий должен быть только такой, какой приведен в алгоритме.

Матрица задания обладает той психологической особенностью, что позволяет симультанно (одновременно) охватить зрительно все условия задачи как нечто целостное. Словесная интерпретация условия задачи, представленной матрицей, достаточно произвольна: условие задачи по ее матрице можно начинать рас-

сказывать с любого элемента, данного в матрице! Так, в приведенном выше тексте условие задачи начинается с фразы: «На матч приехали зрители всего на 7 машинах «Лада». Однако начальной фразой может быть и следующая: «Всего на матч прибыли зрители на 24 машинах «Москвич» и «Лада»... и т. д.

Перевод на словесный код граф-схемы решения, напротив, жесткий, ибо он должен осуществляться только в изображенной последовательности пяти действий (четырех стрелок).

Уже на этом простейшем примере мы видим, как матричное упражнение порождает важный технологический прием — граф-схему суждений.

Можно сказать, что *матричное* и *граф-схемное* представления математических знаний — это взаимно-дополнительные средства формализации процесса мышления. Наибольший учебно-познавательный эффект наблюдается при совместном применении этих технологических приемов оформления знаний.

Мы отмечали выше, что граф-схемы выражают развернутый во времени процесс возникновения цепи понятий и соответствующих умозаключений (одно вслед за другим). Однако завершенная граф-схема, будучи изображена на одной странице, воспринимается подобно заполненной таблице понятий как крупная единица восприятия, как носитель вполне определенного целостного блока знаний.

Можно утверждать, что граф-схема придает зафиксированной информации особое дидактическое качество симультанности, а именно: законченную граф-схему можно воспринимать одномоментно, следуя взором как сверху вниз, так и снизу вверх. В то же время отдельные куски, части, фрагменты граф-схемы, состоящие из 2—3 ячеек, могут в дидактических целях рассматриваться независимо как представляющие самостоятельную информацию, как отдельное упражнение. Если, однако, решение той же арифметической задачи записывать, как это обычно делается в вопросно-ответной форме, перемежая слова и числа (нередко на двух сторонах тетрадного листа), то не возникает психологического эффекта одномоментного «схватывания» процесса, имеющего *начало* и *конец*.

Использование взаимосвязи матричного и граф-схемного подходов открывает новые дидактические возможности для обобщения приемов мышления.

Преобразуем рассмотренную выше задачу про футбольный матч, представив обобщенную задачу матрицей, охватывающей три города *А, Б, В* и три разновидности машин: «Лада» (*Л*), «Москвич» (*М*), «Запорожец» (*З*). Усложнение задачи осуществляем при сохранении четырех данных чисел первоначальной задачи.

*Исходная таблица* (2×2):

| | *А* | *Б* |
|---|---|---|
| *Л* | 3 | 4 |
| *М* | 11 | 6 |

*Новая таблица* (3×3):

| | *А* | *Б* | *В* |
|---|---|---|---|
| *Л* | 3 | 4 | 1 |
| *М* | 11 | 6 | 1 |
| *З* | 0 | 2 | 5 |

Затем составим матрицу, порождающую условие задачи, найдя суммы по рядам и столбцам.

| | *А* | *Б* | Всего |
|---|---|---|---|
| *Л* | 3 | 4 | 7 |
| *М* | 11 | 6 | 17 |
| Всего | 14 | 10 | 24 |

| | *А* | *Б* | *В* | Всего |
|---|---|---|---|---|
| *Л* | 3 | 4 | 1 | 8 |
| *М* | 11 | 6 | 1 | 18 |
| *З* | 0 | 2 | 5 | 7 |
| Всего | 14 | 12 | 7 | 33 |

Чтобы составить какую-либо задачу на основе таких усложненных матриц, достаточно оставить в них наименьшее количество чисел (т. е. наибольшее число пустых клеток). В левой таблице важно добиться того, чтобы в каждом столбце (строке) было не более двух чисел, а в правом — не более трех.

Приведем по одной задаче к обеим матрицам.

*Задача № 1*

| | *А* | *Б* | Всего |
|---|---|---|---|
| *Л* | 3 | □ | 7 |
| *М* | □ | 6 | □ |
| Всего | □ | □ | 24 |

*Задача № 2 (обратная)*

| | *А* | *Б* | *В* | Всего |
|---|---|---|---|---|
| *Л* | 3 | □ | □ | 8 |
| *М* | □ | 6 | 1 | □ |
| *З* | 0 | □ | 2 | 7 |
| Всего | □ | 13 | □ | 33 |

Дано: 4 числа.

Найти: 5 чисел.

На футбольный матч приехали зрители на 24 машинах из двух городов *А* и *Б*, причем 7 машин были «Лада». Из города *А* приехали на 3 машинах «Лада», а из города *Б* на 6 машинах «Москвич». Сколько машин приехало из каждого города?

Дано: 9 чисел.

Найти: 7 чисел.

На футбольный матч приехали зрители на 33 машинах из трех городов *А, Б, В*, причем 7 машин были «Запорожец», а 8 машин «Лада». Из города *Б* приехали 13 машин, из них 6 «Москвичей». Из города *В* 1 машина «Москвич», 2 машины «Запорожец», из города *А* приехали 3 «Лады», но «Запорожцев» из *А* не было. Сколько машин приехало из каждого города?

Разумеется, на основе исходной полностью заполненной таблицы можно составить указанным приемом множество различных задач, имеющих одно и то же решение (выражаемое соответствующей полностью заполненной таблицей).

В методическом отношении в подобных упражнениях с парными таблицами важны следующие моменты:

1. Очень ценен для развития мышления и речи учащихся перевод свернутой в таблицу информации в словесную форму, в форму развернутого рассказа условия задачи. (При этом числа, оставленные в таблице, следует перебирать последовательно по строкам или в порядке следования столбцов матрицы.)

2. Особо следует заметить, что запись двух задач рядом в двух параллельных столбцах, т. е. наглядное обобщение задачи с матрицы $2\times2$ на матрицу $3\times3$, есть специфическое упражнение, развивающее логическое и алгоритмическое мышление.

Сопоставим начальные звенья граф-схем решения первоначальной и обобщенной задач.

*Задача № 1:*

$$24-7=17 \rightarrow 17-6=11 \rightarrow 11+3=14$$

и т. п.

*Задача № 2 (обобщенная):*

$$8+7=15 \rightarrow 33-15=18 \rightarrow 6+1=7 \rightarrow 18-7=11 \rightarrow 11+3=14 \rightarrow 14+0=14$$

и т. п.

Сравнивая граф-схемы решения задачи № 1 и обобщенной задачи № 2, мы видим, что во втором случае каждая операция становится сложной, двусоставной: сначала выполняется сложение двух чисел в том или ином столбце (строке), а затем находится оставшееся число в том же столбце (строке). Таким образом, обобщение матричной задачи делает необходимым усложнение каждого шага алгоритма для решения обобщенной задачи № 2.

## § 9. ДИАЛОГ ОБ УКРУПНЕНИИ ДИДАКТИЧЕСКОЙ ЕДИНИЦЫ

У естествоиспытателей узко понятие превращения и нет понимания диалектики.

*В. И. Ленин*

...Критика бывает правильной и неправильной, конструктивной, с советами и указанием путей совершенствования научных выводов и методов, и злонамеренной, демагогической, обусловленной только личными эгоистическими или групповыми интересами.

*Л. Седов*

Понятие «укрупнение дидактических единиц», терминологически оформленное нами в 1968 г., постепенно входит в обиход учителей и методистов, в понятийный аппарат современной педагогики.

В настоящее время идея укрупнения единиц усвоения как основа для создания экономных и эффективных программ и учебников по математике, испытанная в трехлетнем эксперименте, не имеет конкурентоспособных альтернатив. Однако становление новой идеи в педагогике носит сложный и противоречивый характер.

Примечательно, что среди материалов обсуждения концепции укрупнения дидактических единиц не было ни одного выступления, где доказывалась бы на опыте обучения неоправданность этой идеи в той или иной конкретной обстановке. Как уже говорилось выше, на протяжении тридцати лет (1956—1986) мы тщетно охотимся за фактами, противоречащими нашим взглядам, ищем их в научной литературе и в жизни.

Распространению дидактической истины содействуют не только дружные голоса единомышленников, но и... возражения инакомыслящих, пусть и высказанные неявно или вскользь.

Примечательно, что некоторые авторы, избегая в своих работах употребления понятия «укрупнение единиц усвоения», предлагают синонимические толкования этого термина.

Иначе говоря, предпринимаются литературные, словесные попытки (без упоминания об опыте применения данной системы в школе), которые могли бы ослабить в определенной степени влияние данной методической системы на строй мыслей учителей.

Поучительно ознакомиться с этими лингвистическими опытами. В публикациях В. В. Давыдова, З. И. Калмыковой, Н. Г. Дайри, И. Д. Зверева, Н. П. Гузика, С. Л. Соловейчика и других при характеристике явлений обучения, связанных с укрупнением единиц усвоения, употребляются иные словосочетания, но производные от корня слова «крупный», например: «укрупненные темы»,

«укрупненные части», «основные единицы усвоения», «крупные блоки», «уплотнение знаний», «большие порции» и т. п. В других работах слово «укрупнение» вовсе опускается из сочетания «укрупнение дидактических единиц». Так, В. И. Загвязинский толкует об «элементарных единицах», «структурных единицах», «единицах содержания» и даже о... «генетических единицах»[1].

Заслуживают внимания научные истоки оформления понятия УДЕ в наших работах. Известный советский дидакт М. А. Данилов еще в 1971 г. писал: «Ведущей идеей огромной исследовательской работы П. М. Эрдниева является идея всемерного повышения творческого начала в изучении детьми материала на путях укрупнения единицы усвоения и применения логики дихотомий»[2]. Однако С. А. Шапоринский в своей книге, вышедшей десятью годами позже, неожиданно утверждает: «...вопрос о том, что такое единица усвоения, М. А. Даниловым вовсе не рассматривается»[3]. Нетрудно заметить, что С. А. Шапоринский вместо термина «*укрупнение* единиц усвоения» предлагает читателям термин «единица усвоения», который, по существу, не несет серьезной новой смысловой нагрузки в дидактике. Дидактическая новизна появляется в том случае, если акцент делается именно на интегративном аспекте *укрупнения* единиц усвоения, но именно укрупнения так старательно избегают наши оппоненты.

С. А. Шапоринский, так ни разу и не употребивший в своей книге главного слова «укрупнение», идет в демонтаже понятия УДЕ еще дальше: вместо термина из двух слов «единица усвоения» он как бы незаметно переходит вообще к термину... «единица». Вырвавшись посредством этого приема на простор абстрактных ассоциаций (коль скоро объект обсуждения успешно утерян!), он далее уже свободно толкует об «информационных единицах», подобно тому как В. И. Загвязинский —«о генетических единицах», и т. д.

Некоторые оппоненты не останавливаются в полемике от приписывания нам таких утверждений, какие нами вовсе не высказывались.

Так, А. М. Пышкало и М. И. Моро утверждают, что будто один из авторов данной книги ввел понятие «методические единицы», причем выдвигая их «...в качестве „универсальной“ (?) основы построения методики»[4]. (Об универсализме мы скажем особо в последующем изложении.)

Л. Я. Зорина пишет в одной из своих статей: «Структурные

[1] *Загвязинский В. И.* Методология и методика дидактического исследования. М., 1982. С. 58, 59, 60, 135.

[2] Проблемы методологии педагогики и методики исследования. М., 1971. С. 82.

[3] *Шапоринский С. А.* Обучение и научное познание. М., 1981.

[4] См.: Актуальные проблемы методики обучения математике в начальных классах/Под ред. А. М. Пышкало, М. И. Моро. М., 1977. С. 173.

элементы науки в содержании образования на уровне учебных предметов играют роль дидактических единиц содержания и процесса обучения...» Демонтаж трехсловного термина здесь достигается так же «незаметно»— через превращение УДЕ в ДЕ, причем ДЕ присоединяется... уже к «содержанию обучения».

Результат тот же: из нового научного понятия изымается сердцевина; тем самым незаметно происходит превращение понятия с определенным содержанием в бессодержательное, как бы развенчанное (*Зорина Л. Я.* Отражение науки в содержании образования//Теоретические основы содержания общего среднего образования/Под ред. В. В. Краевского, И. Я. Лернера. М., 1983. С. 108).

Мы выше остановились лишь на перипетиях терминологического оформления понятия укрупнения дидактических единиц (УДЕ).

Проникновение идеи укрупнения знаний в школу совершается ныне в борении страстей, через преодоление традиций, мнений и даже желаний — это неизбежный процесс становления каждого нового сколь-нибудь серьезного направления в науке об обучении.

Прочитав эту книгу, непредубежденный читатель поймет, конечно, что авторы хотят поставить на службу учителю и школьнику доступную и экономную *технологию* ускоренного и углубленного овладения программными знаниями посредством укрупнения единиц усвоения, т. е. совметного и одновременного изучения логически различных понятий, обладающих *информационной общностью*.

В содержании книги показано, что идея освоения знаний *крупными блоками* получила научно-теоретическое обоснование и выдержала проверку в горниле массовой школы. Многолетнее обучение по пробным учебникам математики, составленным на основе идеи укрупнения, показало очевидные преимущества этой методики перед традиционной, общепринятой методической системой.

У читателя возникнет вопрос: что же препятствует тому, чтобы данная методическая система была взята на вооружение массовой школой? Если есть не согласные с данной идеей, то каковы же тогда их контраргументы?

Для правильной оценки достигнутого и определения перспектив нового направления важно обсудить возражения инакомыслящих, памятуя, что всякая новая идея проходит в сознании человека три стадии признания: 1) «Этого не может быть!»; 2) «В этом что-то есть!»; 3) «Кто же этого не знает?».

Далее мы приводим диалог двух символических оппонентов — коллеги П., еще не во всем согласного с линией укрупнения единиц усвоения, которого «критическое здравомыслие» поневоле приводит в целом к осторожному скепсису в оценке нового, и коллеги С.— сторонника данной линии, по-видимому убедившегося в

реальных преимуществах обсуждаемой методической системы не столько по теоретическим соображениям, сколько практически, в результате испытания системы УДЕ на собственных уроках.

Так как «подслушивающих» этот откровенный диалог нет, то собеседники настойчиво отстаивают свои позиции и беседа становится... нередко напряженно-эмоциональной.

В содержании диалога использованы дидактические исследования других авторов, рецензии на наши работы, опубликованные в печати, а также материалы обсуждения наших сообщений на научных собраниях в последние 20 лет.

*Коллега П.* Развитие всякой науки концентрированно выражается посредством новых понятий, отражающих сущность неизвестных ранее явлений (информация, ген, условный рефлекс и т. п.). Мне представляется, что вводимое вами понятие не обладает все еще высоким уровнем популярности.

В самом деле, есть смысл говорить о логических единицах знаний, т. е. о понятиях, суждениях и умозаключениях. В дидактическом анализе есть резон оперировать также представлением о количестве информации, измеряемой в битах. Однако каково же приращение наших знаний, которое приносится понятием «укрупнение дидактических единиц»?

*Коллега С.* Вы правы в том, что единица усвоения имеет логическую и информационную характеристику. Однако формальная логика и теория информации подходят к человеческим мыслям в полном отвлечении от движения и изменения мыслей во времени и пространстве мозга.

«Укрупненные дидактические единицы» должны сознательно конструироваться автором учебника или учителем в качестве целостных блоков знаний, богатых внутренними связями (переходами) между элементами, образующими эти укрупненные единицы знания, удобные для понимания, запоминания и воспроизведения.

Дидактические единицы учебного материала существуют и функционируют, конечно, при любой методике обучения. Акцент же у нас делается не на самой единице усвоения, а на необходимости ее *укрупнения,* т. е. на явлении самовозрастания знания вокруг исходной «затравочной» информации. Разумеется, такое укрупнение достигается специальными приемами работы над упражнениями, чему и посвящена вся данная книга.

*Коллега П.* Мне непонятно, почему именно укрупнение. Ведь в литературе существуют и иные термины, характеризующие те же явления: генерализация, уплотнение знаний и т. д.

*Коллега С.* Я бы согласился с вами, если бы вы сказали не «те же», а «родственные явления».

Жизнь показала конструктивность понятия укрупнения: на этой основе удалось построить систему пробных учебников с особой, ранее не встречавшейся логикой учебного познания. Не всякое понятие в педагогике оказывается столь «рентабельным»!

Судьба новых понятий, которых «вводится» в педагогику в последние десятилетия немало, к счастью, не зависит от желаний их авторов. Выживает и начинает приносить пользу лишь такое теоретическое обобщение в дидактике, которое подтверждается реальной технологией, понимаемой и исполняемой каждым учителем. Поэтому не случайно говорят: верховный судья новым предложениям в конечном счете Учитель (учитель с большой буквы).

Нередко проникновению нового понятия в педагогику мешает даже такая деталь, как неблагозвучность предложенного термина (например, онтодидактика), а в других случаях — нарушение лингвистической сочетаемости.

*Коллега П.* Мы все-таки ведем формальный спор о слове-термине. Дело же здесь в другом! Что из того, что какую-то порцию знаний раньше мы не называли укрупненной единицей, а теперь называем? Порции знаний существуют при любой методике обучения!

*Коллега С.* Для адекватной оценки методической системы УДЕ следует учитывать прежде всего фактор времени. Укрупненная единица усвоения становится объектом усвоения для школьника обязательно на одном уроке, и желательно, чтобы вся такая информация была напечатана на одном развороте учебника. В этом — суть!

Процесс укрупнения знаний предполагает сжатие информации в течение небольшого интервала времени. Неопровержимым аргументом в пользу укрупненных знаний выступает то, что при этом достигается экономия учебного времени, которую удается измерить в миллисекундах — при проявлении отдельной ассоциации, в минутах — при решении отдельной задачи, в десятках процентов годового баланса учебного времени — при составлении учебного плана и программ. Из малого рождается великое!

Один из главных приемов укрупнения знания — составление *обратной* задачи. Такой прием преобразования мысли давно исследован психологами (обратимость), логиками (обращение), кибернетиками (обратная связь), философами (единство противоположностей).

Старейший методист начальной школы А. С. Пчелко не помещал в своих учебниках ни одного такого задания. Тем не менее он все же оказался на высоте объективности и предсказал в одной из последних работ большую будущность данному приему. Он писал: «Знание зависимостей между величинами развивается, обогащается существенными признаками и находит свое практическое применение в процессе преобразования задач. Идея преобразования задач уже давно получила свое отражение в советской методике, но в школьной практике она долгое время не находила широкого применения. И только в последние годы, когда было подчеркнуто и выявлено большое значение обратных задач (благодаря трудам П. М. Эрдниева) и раскрыта техника их составления, создались условия для реализации метода преобразования задач. Этот метод занял достойное место в работе липецких учителей, где его пропагандирует А. А. Козлова, в работе ростовских учителей, где успешной разработкой этого метода занимается зам. директора Каменского педучилища Т. М. Юрченко, в практике московских школ (Н. Г. Уткина).

На одном из уроков арифметики в IV классе московской школы № 315 нам привелось наблюдать такую картину. Дети только что изучили на предыдущих уроках по таблицам зависимость между ценой, стоимостью и количеством. «Вы знаете эту зависимость,— сказала учительница,— теперь примените ее на практике». И предложила ученикам задачу: «Для детдома купили 15 м полотна и 20 м сатина по таким-то ценам. Сколько стоит вся покупка?» Ученики решили эту задачу и нашли стоимость купленной материи. Дальше начался ряд преобразований решенной задачи в обратные. «Перестройте эту задачу так,— сказала учительница,— чтобы стоимость в ней стала известной (вы только что ее нашли), а количество полотна стало искомой величиной». С помощью учителя ребята перестроили задачу и решили новую: «Перестройте теперь вновь первую задачу, но так, чтобы в ней искомой величиной стала цена полотна». Такое преобразование исходной задачи повторилось еще два раза, причем изменялись уже другие величины. Таким образом, на основе одной и той же жизненной ситуации было решено пять задач, на которых дети действительно применяли на практике знание зависимости между ценой, стоимостью и количеством, проявляя при этом самостоятельность и необходимую долю творчества»[1].

*Коллега П.* Мне представляется, что позиция сторонников укрупненных знаний все же нуждается и в других аргументах. Мне приходилось читать и 10, 20, и 30 лет тому назад статьи, в которых описывались приемы аналогии, составления и обращения задач и т. п., которые являются конкретными приемами УДЕ. Однако эти приемы отнюдь не назывались тогда укрупнением. Как говорится, «хоть ты в новой коже, а сердце у тебя все то же».

*Коллега С.* Открытия в дидактике, как и в любой иной науке, совершаются отнюдь не на пустом месте. Указанные вами логические приемы имеют место

[1] *Пчелко А. С.* Актуальные вопросы обучения арифметике в предстоящем учебном году//Начальная школа. 1966. № 7.

при укрупнении; конечно, встречались и ранее, но порознь, и потому не было суммарного эффекта. К тому же понятие укрупнения единиц усвоения предполагает определенную последовательность обработки исходной информации.

Например, приему обращения (скажем, от $2 \cdot 8=16$ к $16:2=8$) отдается приоритет перед приемом обращения, когда совершается, скажем, выход от вычислений в пределах 100 к одноименным операциям в пределах 1000 — в круглых десятках (от $2 \cdot 8=16$ к $20 \cdot 8=160$ и т. д.).

Подобно тому как определенная последовательность букв создает осмысленное слово, так и тут: УДЕ предоставляет не просто разнообразие заданий, но и систему последовательных взаимосвязанных заданий с конкретным логическим стержнем.

В наших пробных учебниках математики упражнения с преобразованием заданий составляют более половины упражнений. Иные говорят, что таких заданий может быть и меньше. Однако здесь надо учитывать следующее. Всякое обращенное задание есть переиначенное прямое: вычитание есть видоизмененное сложение, поэтому решение примера на вычитание $8-2$, в общем, требует больше усилий, чем соответствующего примера на сложение $2+6$. Здесь мы встречаемся с явлением общего порядка: упражнений на деление должно быть предложено не меньше, чем упражнений на умножение, и т. п.

*Коллега П.* Насколько нам известно, понятие «укрупнение» стало обсуждаться не так давно, хотя экспериментальное обучение школьников по создаваемой системе велось гораздо раньше.

*Коллега С.* О процессе приближения исследователя к формулировке идеи укрупнения можно судить хотя бы по изменению названий книг в серии работ П. М. Эрдниева: «*Проверка* решения как необходимый элемент обучения математике» (1953); «*Сравнение* и обобщение при обучении математике» (1960); «Прямая и *обратная* задача в элементарной математике» (1965); «Метод *противопоставления* в обучении математике» (1966); «*Одновременное изучение* взаимосвязанных вопросов» (1967); «О структуре *дидактической единицы* усвоения знаний» (1968); «Из опыта обучения методом *укрупненных* упражнений» (1978).

Чудес на свете не бывает. Всякому овощу свой срок. Сколько-нибудь емкое научное понятие не может возникнуть самопроизвольно, по наитию. Понятие «укрупнение» обрело доказательную силу лишь в результате испытаний соответствующих учебников математики; благодаря учебникам осуществился синтез разных подходов, а именно: *методического* (например, проверка решения), *логического* (сравнение), *математического* (обратная задача), *физиологического* (противопоставление), *психологического* (одновременность) и, наконец, как венец поиска — *дидактико-диалектического* (укрупнение единицы усвоения). Особого рассмотрения заслуживает и *технологический* анализ данной методической системы. Ныне содержание понятия «укрупнение» несет в себе в снятом виде весь новаторский задел, излагавшийся в указанных выше книгах.

*Коллега П.* В известных работах, посвященных укрупнению единицы усвоения, допускаются логические неточности, которые затрудняют понимание. Приведу пример. В одной из книг вместо термина «среднее взвешенное» встречается «среднее арифметическое». (См. рецензии на книгу П. М. Эрдниева в журнале «Математика в школе». 1980. № 1. С. 68—69.)

*Коллега С.* Рецензенты, которых вы имеете в виду, допускают логическую ошибку «подмена понятия».

Дело в том, что при учете родо-видового подчинения правила логики разрешают название вида заменять названием рода: прямоугольник можно назвать параллелограммом, а среднее взвешенное называть средним арифметическим. (Ошибочным было бы обратное: нельзя считать всякий параллелограмм прямоугольником и т. п.) В стремлении одолеть новое иные идут даже на нарушение правил этических норм диалога.

*Коллега П.* Сторонники укрупненного подхода к математическим знаниям нередко выдают желаемое за действительное. Приведу один пример.

В базисных программах по математике (Математика в школе. 1981. № 4) появилась строка «Пропорции. Проценты». И вот нашлись методисты, поспе-

шившие увидеть в этом тезисе... внедрение идеи укрупнения в программы; поскольку, дескать, в соответствующем разделе программы «Пропорции» поставлены перед «Процентами», то отсюда будто бы следует, что задачи на проценты надо решать посредством пропорций...

*Коллега С.* Мы не видим здесь передержки. Действительно, в опыте экспериментального обучения подтвердилась гипотеза о целесообразности соблюдения принципа историзма: ведь немаловажно то, что пропорция была найдена греками за 2 тыс. лет до изобретения процентных расчетов в Голландии. То, что открыто раньше, в общем и целом и должно предшествовать и в логике учебного познания.

В программах, составленных при участии АН СССР, поневоле проявилась логика понятий в формулировке и таких разделов, как «Уравнения и неравенства», «Координаты и векторы». Понятие «координата» отнюдь не случайно предшествует здесь понятию «вектор». Неразумно было бы строить изучение вектора вне числовой характеристики, т. е. без координатного толкования.

В. И. Ленин не случайно отмечал, что даже по логическому акценту следует отличать «*диалектический* материализм» от «диалектического *материализма*».

При обсуждении программы по литературе было верно подмечено, что нельзя нарушать без особых причин и хронологию литературных произведений. Антиисторизм опасен для любого учебного предмета. Нельзя, например, изучать Некрасова до Пушкина и т. п.

*Коллега П.* В идее укрупнения единицы усвоения, конечно, есть рациональное зерно. Однако совместное изучение взаимосвязанных понятий хотя и возможно, но в меру, ибо *переукрупнять* тоже не годится... Потеря меры здесь даже опасна.

*Коллега С.* В таком утверждении проглядывает обычная односторонность традиционного опыта, который приходится одолевать учителю в борьбе мотивов: построить урок согласно принципу укрупнения или идти по стабильному учебнику, по накатанному пути?

Истина здесь заключается в том, что учитель может выработать свое отношение к новому, прогрессивному, лишь испытав сам на своих уроках предлагаемые усовершенствования. «Мудрое» же предостережение от крайностей (как бы чего не вышло!) тем и коварно, что заранее «размагничивает» учителя, еще не решившегося на необычный урок, приучая его к пассивному выжиданию: «Пусть другие испытают, а я подожду».

В отношении к новаторству (в данном случае — к методическому) не должно быть брюзжания, пессимизма. Освоение прогрессивной методики обучения есть противоречивый процесс и требует на первых порах — надо об этом прямо сказать — риска, смелости от учителя, ибо оно связано с личным решением идти по непроторенному пути.

*Коллега П.* В методике выдвигалось немало понятий, которые привлекали внимание учителей. Появлялись и удачливые последователи, у которых тот или иной элемент новой методической системы давал реальный результат. Однако при массовом внедрении, т. е., скажем, при переходе к учебникам, построенным на новых началах, возникает риск, что не у каждого учителя получится столь хорошо, как у автора новой методической системы.

*Коллега С.* Ваши сомнения справедливы. Можно здесь воспользоваться аналогией. В практике продажи промышленной технологии развивающимся странам часто придерживаются *принципа «ноу-хау»*. Он означает следующее: недостаточно передать покупателю оборудование с инструментарием, чертежами и подробными инструкциями. Чтобы проданное оборудование заработало на новом месте, важно научить рабочих страны-покупателя личным показом, инструктажем («делай так!»).

В педагогическом труде, особенно в новаторском, немало таких деталей, которые невозможно объяснить теоретически, на словах, а можно научить желающего лишь личным показом на деле.

Можно сказать, что успех такого внедрения обеспечивается на уровне подсознания. Наблюдая урок математики, построенный на идеях УДЕ, заинтересованный учитель «впитывает» весь сценарий, который в принципе невозможно описать в логических понятиях: переходы между этапами урока, эмоциональ-

ный настрой учителя, логические ударения, взгляд и голос учителя — все это имеет значение для успешного освоения знаний на уроке.

М. Шагинян, описывая учительские съезды, проводившиеся И. Н. Ульяновым, отмечает главное в этом мероприятии: съезды проходили с обязательным посещением уроков в школах, проводимых лучшими учителями, и включали обсуждение увиденного. По-видимому, это единственный путь наиболее эффективного распространения той или иной новации в педагогике. По одним книгам, не видевши лично урока, построенного в новом ключе, трудно освоить эту новую методическую систему.

Слов нет, решению данной проблемы способно всемерно содействовать сейчас учебное телевидение. Ныне так повелось, что на учительских конференциях много говорят о том, как надо учить детей. Несравненно было бы полезней, если бы они включали показ и обсуждение уроков, профессионально проведенных учителями-новаторами. Это так же верно, как и то, что безотвальную пахоту или непрерывную разливку стали прежде всего показывают, а уже потом обсуждают.

*Коллега П.* Я готов согласиться с тем, что укрупненный подход к структуре учебного материала в ряде случаев оправдывается. Однако преувеличивать роль того или иного метода — это крайность и может принести вред вместо пользы. Скажем, почему нельзя Анне Петровне повторять после таблицы умножения названия треугольников, если у нее это «получается»? А Нина Ивановна, уверовавшая в тематическое повторение, пусть связывает таблицу умножения с соответствующими задачами на умножение и деление, сознательно достигая укрупненного знания...

*Коллега С.* Ваши рассуждения затрагивают острейший вопрос внедрения УДЕ в практику школьного обучения.

Сфера педагогики — наиболее обширная в обществе, и потому в ней так ценны верные обобщения, резонирующие в сознании массового учителя; по той же причине здесь неточные или «ложные идеи способны исказить поле сознания, стихийная цепная реакция их — породить ложные тенденции в нашей жизни» (Л. С. Понтрягин).

Рассмотрим в данной связи некоторые распространенные суждения, в истинности которых бывает трудно усомниться, если оставаться на базе представлений обыденного познания или «логики здравого смысла».

Учителям часто советуют помнить о том, что якобы *нет и не может быть универсальных средств обучения*. Эта мысль ныне кочует в разных вариациях по страницам педагогических газет и журналов, зачастую подминая уже в зародыше попытки педагогов-новаторов осмыслить и обобщить новые факты, рождаемые, как и в любом деле, смелым розмыслом.

В нашей стране учатся 80 млн. человек; несколько миллионов работают в сфере образования.

Философы считают, что в эпоху НТР познание мира человечеством совершается движением по триаде: обыденное познание — учебное познание — научное познание.

Педагогика — наука, и, стало быть, в ней могут быть сделаны открытия и сформулированы неизвестные ранее положения о рациональном обучении.

Новые педагогические закономерности, если они действительно верно отражают природу учебного познания, будут проявляться неизбежно с положительным исходом у любого учителя (начинающего или опытного), если только они используются с учетом условий места и времени.

И. П. Павлов нашел, что для нервной системы животных универсален, например, закон перемежающегося противопоставления контрастных раздражителей как средство оптимальной выработки условных рефлексов. Этот закон сохраняет силу (разумеется, при правильном его понимании) и в сфере обучения людей. В системе обучения математике указанная закономерность реализуется внешне в форме укрупнения единиц усвоения, достигаемого при одновременном изучении, скажем, сложения и вычитания не только целых чисел (I—II классы), но и дробей (IV—V классы), алгебраических выражений (VII класс), $n$-мерных определителей и векторов (в вузе) и т. п.

Почему же в этом укрупнении нельзя увидеть всеобщности проявления преимуществ совместного изучения контрастных операций? Испытание в массовой школе созданных на указанной основе пробных учебников математики убеждает, что грамотное применение «павловского противопоставления» дает безотказный, поистине *универсальный эффект*.

Эффект укрупнения контрастных знаний, таким образом, доказан на достаточно разнообразном материале программы. Но если мы нарушим логику вопроса, начнем изучать, скажем, в пределах 10 все четыре действия арифметики (соединять пуды с аршинами), ничего не получится, но это не здоровая «универсализация», а грубое нарушение условия перемежающегося противопоставления, ибо «сложение и деление» или «умножение и формы треугольников» не являются противоположностями.

В педагогической литературе встречаются, к сожалению, подобные произвольные толкования «закона противопоставления» И. П. Павлова.

В сборнике «Проблемы школьного учебника» (1983, № 12) в одной из статей рекомендуется сравнительное изложение периодического закона Менделеева (химия!) и закона... Ома (физика!), хотя эти два закона не имеют общей информационной основы. Надо помнить в этих случаях, что И. П. Павлов специально подчеркивал, что противопоставлять можно лишь «родственные агенты», например: высокий и низкий тон звука (общность — колебательное движение воздуха); круг и эллипс (общность — криволинейность и замкнутость фигур) и т. п. Но нельзя противопоставлять световой сигнал... звуковому (?), ибо это раздражители *разной природы*.

В плане обсуждаемого важно то, что укрупненная единица знания всегда возникает на базе явного или скрытого противопоставления родственных знаний. Укрупненная единица слагается из элементов, логически различных, но имеющих обязательно информационное родство, например: умножения и деления, поскольку они являются взаимно-обратными действиями второй ступени; или периметра ($4a$) и площади квадрата ($a^2$), поскольку эти понятия относятся к одной фигуре и в их формулах присутствует одна и та же величина — сторона квадрата. И т. п.

*Коллега П.* Трудно сейчас утверждать, что проблема укрупнения дидактической единицы мало кому известна. Об этом писалось много и долго, в газетах и журналах. Приходится признать, что некоторые позиции по укрупнению материала уже нашли отражение в последних школьных программах. И все же вы согласитесь со мной, что малы успехи у сторонников данной концепции, невелики масштабы внедрения системы укрупненных единиц в практику обучения.

*Коллега С.* Внедрение в массовую практику новых методов обучения не столько эволюционный, сколько — мы бы сказали — революционный процесс. При громадной инерции привычного «здравого смысла» в сфере педагогики иные читатели не сразу решаются на собственные пробы, благодаря которым только и возможно им убедиться в реальной пользе нового подхода.

Педагогика — общественная наука, и внедрение нового в ней связано с острой борьбой мнений, исход которой зависит не от одной лишь самой по себе истины (которая, конечно, рано или поздно пробивает себе дорогу), но и от внутренней активности главного действующего лица — Учителя. В деле внедрения новой технологии обучения учитель не должен быть сторонним наблюдателем, ибо внедрение нового никогда не происходит самотеком.

Внедрение технологии укрупнения в практику будет только тогда реальным, когда соответствующие приемы найдут свое место в стабильных учебниках.

Пусть на столе учителя лежат два варианта учебника, один из которых построен при максимальном использовании всех технологических деталей УДЕ. По-видимому, этот путь — единственный для быстрейшего определения лучшего варианта.

*Коллега П.* Похвально, конечно, что в печати то тут, то там сообщают о педагогических фактах, прямо или косвенно подтверждающих значимость укрупненного подхода к изучаемому материалу. Однако судьба нового в науке не всегда зависит от количества отзывов или откликов. Бывает и так: слышен звон, а неизвестно, откуда он.

При расширении сферы внедрения часто возникают непредвиденные трудно-

сти. Все предусмотреть заранее трудно, в особенности в педагогике. Педагогика все-таки есть симбиоз науки и искусства... Если новый подход одному удался, то это вовсе не означает, что и у другого сразу *получится*.

*Коллега С.* В нашей стране массовое и обязательное обучение. Иные злоупотребляют тезисом: «Учителем надо родиться». Между тем учителем, как и солдатом, не рождаются. На массовую профессию учителя люди выучиваются, а вот усваиваемая ими технология обучения чаще всего бывает не самая эффективная...

В печати действительно появилось немало высказываний в поддержку идеи укрупнения знаний, написанных не только учителями и методистами, но и философом, биологом, логиком, медиком. Интерес специалистов разных отраслей к тезису об укрупненной структуре информации правомерен, ибо дидактические обобщения вообще возникают на стыке всех наук о человеке. Здесь нередко «сторонняя» оценка нового явления (как бы с высоты птичьего полета) выявляет в нем такие особенности, которые остаются незаметными с «близкого расстояния».

Заставляет задуматься следующее суждение об УДЕ: «Представляется, что возможность укрупнения дидактических единиц важна не только для уплотнения, сжатия информации и достигаемой за счет этого экономии времени. Работы, связанные с укрупнением дидактических единиц, могут оказаться полезными для перехода с детального, микроуровневого описания и изложения той или иной дисциплины *на уровень более высокого обобщения,* приближающегося к структурному изложению содержания дисциплины, корреспондирующего соответсвующим обобщенным понятиям»[1].

В статье имеется ссылка на нашу работу, опубликованную в том же журнале.

*Коллега П.* Сторонники обсуждаемой идеи настаивают на термине «дидактические единицы». А почему бы здесь не говорить о «методических единицах», ведь, в сущности, некоторые результаты по обсуждаемой системе получены прежде всего в области методики преподавания математики.

*Коллега С.* Проблема укрупнения единиц усвоения, содействуя решению указанной задачи, оказывается в центре внимания специалистов не только в области математического образования. Обладая силой общности, концепция УДЕ непосредственно влияет на исследования методистов по другим учебным предметам; приведем тому несколько свидетельств.

В книге учителя Н. П. Гузика «Учить учиться» (М., 1981) изложена методика укрупненного изучения химии в средней школе. Л. И. Балашова ряд лет ведет успешные исследования в области обучения русскому и иностранным языкам по комплексной подаче информации в воспитательных мероприятиях (например, картины, музыка и художественный текст на одну и ту же тему). В некоторых публикациях (В. Ковешников) исследуется возможность распространения укрупнения на практику изучения общественных наук в вузах. Пишут о целесообразности создания интегрированного учебного предмета «Биология», включающего ботанику и зоологию.

Имеются основания полагать, что окажется столь же выгодным совместное изложение таких родственных разделов, как морфология и синтаксис, физическая и экономическая география и т. п.

Укрупнение единиц усвоения находит все большее признание в вузовской дидактике. Стало фактом создание единого курса геометрии в пединститутах; член-корреспондент АН СССР А. А. Ляпунов предлагал создать в педвузах объединенный курс общей физики и методики ее преподавания и т. д. Академик Л. С. Понтрягин издал книгу, в которой излагаются совместно теория функций действительного и комплексного переменного.

Многое говорит о том, что на рельсах укрупнения знаний должна решаться проблема интеграции, творческого синтеза общеобразовательного, специального и профессионального аспектов в подготовке учебных планов, программ и учебников для вузов различного профиля.

[1] *Долженко О., Янушкевич Ф.* Новые методы и технические средства в вузовской дидактике//Современная высшая школа. 1982. № 2. С. 95.

Наиболее ценные стороны в теории укрупнения дидактических единиц раскрываются при интерпретации этого явления в системе представлений физиологии высшей нервной деятельности.

Воспользуемся понятием «психический мутагенез», введенным членом-корреспондентом АН СССР П. В. Симоновым; он приводит следующую гипотетическую схему двух типов отражения связи между событиями *А* и *Б* (рис. 30 на с. 126).

В первом случае отражение носит однонаправленный упрощенный характер: после ассоциации *А→Б* возникает ассоциация *а→б*, и только. Иначе говоря, появлением второй ассоциации *а→б* течение мысли завершается без продолжения. Такие двухэлементные одноэтапные мыслительные процессы весьма близки по своей структуре к проявлению простейших рефлексов. Подобная схема характеризует и общую картину выполнения традиционных готовых упражнений, как правило, заканчивающегося получением ответа, причем ученику не предлагаются задания по какому-либо преобразованию решенной задачи.

Особенности *второго типа усвоения* представлены одним символом, а именно толстой (кривой) стрелкой, направленной снизу вверх. Вторая стрелка, отсутствующая в схеме первого типа, означает возникновение *системного качества:* появление внутри данного информационного блока обратных связей, осуществление самоконтроля операций и т. п., т. е. всего того, что не имеет места при выполнении упражнений первого типа. При выполнении заданий второго типа не только исходная ассоциация *А→Б* становится толчком к проявлению связи-следствия (*а→б*), но и наоборот — вторая связь, став реальностью, немедленно влияет на первую связь, обогащая и доращивая ее до комплексной единицы, до *целостности*.

Таким образом, усложненное связями знание, становясь в дидактическом отношении укрупненной единицей усвоения (УДЕ), приобретает качество системности. Второй тип усвоения знаний П. В. Симонов объясняет «психическим мутагенезом», т. е. самопроизвольным возникновением новых связей в пределах данного блока знаний, независимо от воли субъекта. «Ранее приобретенный опыт,— пишет он,— не только поставляет материал для «мутаций», но в значительной мере предопределяет направление мутирования»[1].

Заметим, что мутация означает в генетике случайное изменение структуры наследственного вещества (под влиянием радиации, химических веществ и т. п.). Известно, что мутация может привести как к положительному, так и к отрицательному для организма результату.

[1] *Симонов П. В.* Эмоциональный мозг. М., 1981. С. 179.

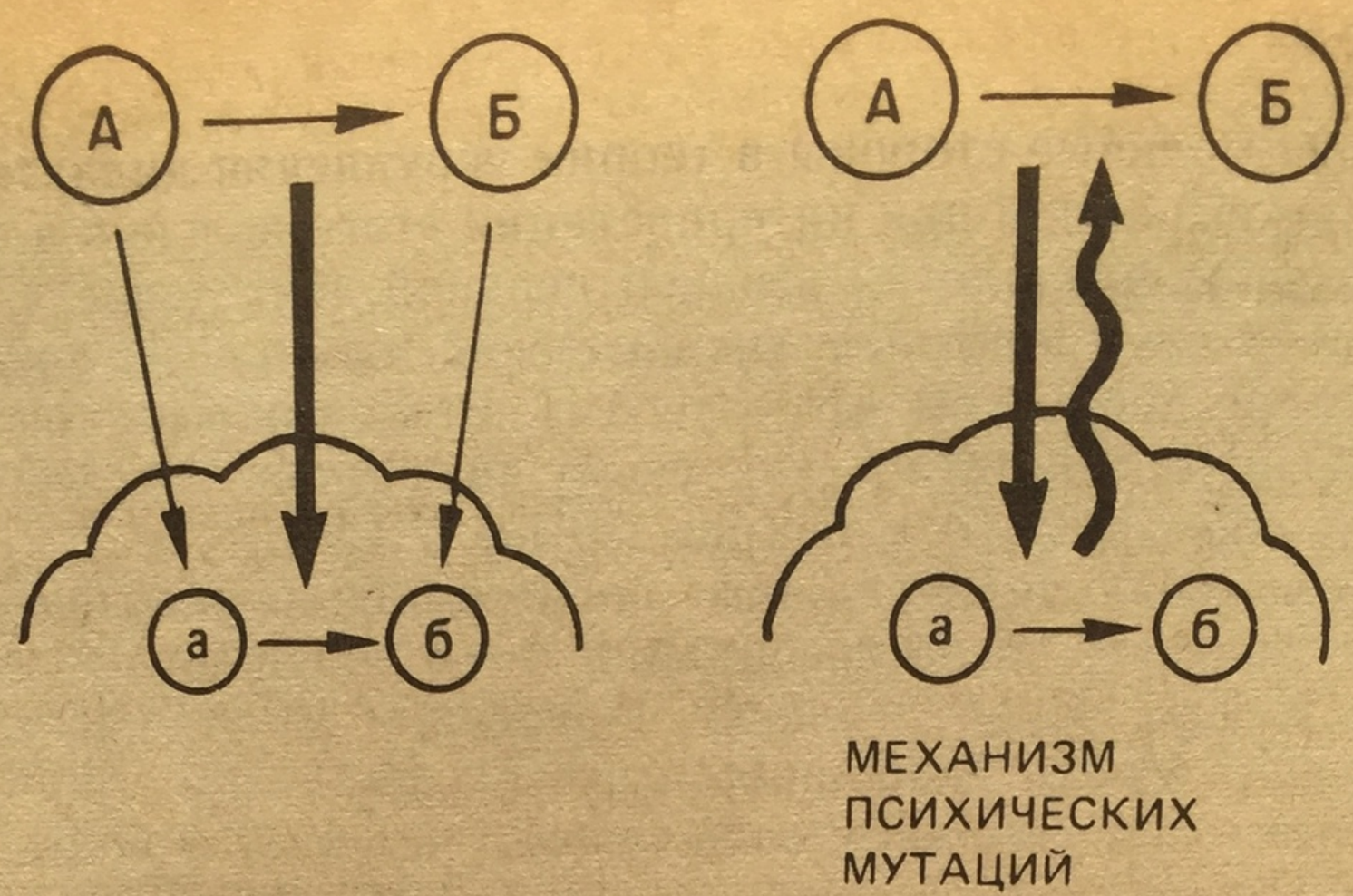



СХЕМА ДВУХ ТИПОВ ОТРАЖЕНИЯ

**Рис. 30**

Рассмотрим простейший пример. В системе обучения на основе УДЕ, допустим, исходная задача (4+2=6) преобразуется в обратную задачу (6—2=4).

Составление и решение обратной задачи, будучи осмыслено в сравнении с решением прямой задачи, содействует в определенной мере второму типу усвоения знаний. В этом случае мышление действительно обогащается возникновением обратных связей и самоконтроля (ответ обратной задачи выполняет функцию проверки решения прямой задачи и т. п.).

Исследование УДЕ как проблемы эффективного обучения проводится нами уже свыше 30 лет. Наибольшего внимания в этом длительном экспериментально-теоретическом поиске заслуживает явление *дальнодействия методической системы УДЕ*.

Приведем в этой связи характерный факт, установленный экспериментально в школе № 82 Ногинского района Московской области, а именно: учащиеся бывших экспериментальных классов через 5 лет после окончания экспериментального обучения (в 1985 г.) превосходили своих сверстников из контрольных классов по качеству знаний (оценки «4» и «5») на 6%, причем не только по математике. (Заметим, что обучение посредством УДЕ проводилось в 1977—1980 гг. по учебникам П. М. Эрдниева только по одному учебному предмету — математике.)

Член-корреспондент АН СССР Л. Г. Воронин указывает, что след от условного рефлекса у человека иногда проявляется даже через 50 дней! Поучительно в данной связи обнаружение лабораторией Л. Г. Воронина «проприоцептивных единиц информации»[1].

С помощью Ж-образного лабиринта была создана для крыс условнорефлекторная среда, в которой вырабатывались циклические (повторяющиеся) сложные рефлексы, состоящие из последовательности четырех движений животного, каждое из которых несло 1 бит информации (выбор одного варианта из двух возможных), а именно: 1) подхода к полке справа или слева, 2) выхода из лабиринта справа или слева, 3) прохода в левый или правый отсек (через нижнюю или верхнюю дверь), 4) выхода в свободное поле через правую или левую половину лабиринта.

При помещении в свободное поле крыса самопроизвольно подходила к полке, нажимала передними конечностями на нее, в результате чего включался условный стимул — свет электрической лампы. В зависимости от длительности действия

[1] *Воронин Л. Г.* Вопросы теории и методологии исследования высшей нервной деятельности человека. М., 1982.

света (1 с или 7 с) крыса бежала к одной из подкрепляющих кормушек (с пищей); затем, получив порцию пищи, выходила из лабиринта, чтобы повторить снова всю последовательность движений ради получения пищи, подкрепляющей условный рефлекс.

Таким образом, исследователи включили в состав сложного условного рефлекса как ориентацию в пространстве (выбор направления — вправо и влево или вниз и вверх), так и восприятие длительности (время горения света 1 с или 7 с).

Экспериментаторами установлено, что у животных возникает качественная перестройка способов считывания информации, полученной в попытках добраться до пищи, и перекодирование ранее поступившей информации. Так, в начале обучения отрезок информации соответствовал паре, затем тройке движений, причем каждая такая последовательность представляла законченное двигательное совершение условного рефлекса (проприоцептивную единицу). (Здесь переход от двухэлементной единицы к трехэлементной совершается самопроизвольно в нервной системе животного.)

Наконец, отрезок информации (сложная единица информации) соответствовал «пространственной форме двигательного навыка, построенной на основе синтеза четырех двигательных реакций, объединенных по системе поворотов по отношению к фиксированной точке в экспериментальном поле» (Л. Г. Воронин).

Описанный факт замечателен тем, что показывает тенденцию к удлинению последовательности носителей информации, постепенное включение в состав содержательной единицы возрастающего числа элементарных носителей информации. Несомненно, что тенденция к укрупнению знаний, присущая психике человека, имеет базальную предысторию в закономерностях переработки информации, возникшую уже на низших ступенях эволюционной лестницы.

Интересно в этих опытах и другое. Было установлено, что даже при проведении опытов в течение 5 месяцев у животного не возникают побочные, менее эффективные информационные единицы. Иначе говоря, удовлетворение потребности — вот что предопределяет отбор и упрочивание условных рефлексов, в том числе и сложнейших, как у человека.

Мы описали выше проявление следов от трехлетнего непрерывного обучения по системе УДЕ (1977—1980), зафиксированных через 5 лет после завершения экспериментального обучения (в 1985 г.). Такое отдаленное (через 5 лет!) последействие системы УДЕ представляет собой сложное проявление так называемых следовых процессов, восходящих в своих истоках к условнорефлекторным явлениям.

В известной нам литературе столь отдаленного проявления конкретных следствий практического использования целостной методической системы (подобной УДЕ) не встречалось. Поскольку на основе УДЕ нам удалось создать целенаправленную серию учебников математики, принципиально отличающихся от общепринятых, постольку указанное выше явление дальнодействия системы УДЕ имеет важное значение, еще не оцененное по достоинству в современной педагогике.

Систематическое обучение посредством УДЕ становится средством выработки высокоэффективных приемов мышления (алго-

ритмов), переносимых школьником в последующие годы на процесс усвоения знаний, причем не только по математике, но и по другим учебным предметам.

Явление дальнодействия методической системы УДЕ, обнаруженное через 2 года и через 5 лет после трехлетнего обучения в начальной школе (в 1982 и 1985 гг.), должно учитываться при составлении программ и учебников; этот феномен означает в конечном счете проявление фундаментальной закономерности работы нервной ткани по законам условных рефлексов (временны́х связей).

Причиной обнаруженного дальнодействия методической системы УДЕ служит предшествовавшая практика обучения одному предмету — математике — в течение трех лет в I—III классах (1977—1980). Логично ожидать, что проявление данного качества было бы еще более заметным, если, скажем, обучение по системе УДЕ длилось бы больше трех лет и проводилось бы также по другим предметам. Дальнодействие системы УДЕ связано с приобретением учеником специфических приемов диалектического ви́дения мира информации (понимание целостности явления, взаимосвязь анализа и синтеза, зачатки продуктивного мышления и т. д.)[1].

* * *

Основная задача нашего исследования в настоящее время — это доведение до всего учительства наших учебников математики, построенных на идее укрупнения, которые могут принести подавляющему большинству учащихся, образно говоря, повышение уровня знаний на один балл, а школе — экономию учебного времени до 20% против годовых норм. Значимость идеи укрупнения дидактических единиц как фактора совершенствования знаний учащихся особенно возрастает в период проводимой сейчас реформы общеобразовательной школы.

[1] Заслуживает внимания сообщение Н. Е. Вераксы о том, что усвоение таких элементов диалектического мышления, как обращение, превращение суждений, доступно уже дошкольникам (Вопросы психологии, 1987, № 4, с. 136).

Глава II

# МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЕ НА ОСНОВЕ УКРУПНЕНИЯ ДИДАКТИЧЕСКИХ ЕДИНИЦ

## § 11. ОБ ОБЪЕМЕ ЗНАНИЙ УЧАЩИХСЯ ПО МАТЕМАТИКЕ ЗА ПЕРВЫЕ ДВА ГОДА ОБУЧЕНИЯ

Действующая программа предусматривает изучение в I классе лишь двух действий первой ступени — сложения и вычитания. Оспаривать это решение невозможно, оставаясь на формально-логических позициях: в принципе можно и во II классе продолжать изучение сложения и вычитания, доходя, скажем, до класса миллиардов!

Ограничение первого года обучения лишь двумя действиями есть, по существу, отход от того, что было уже достигнуто в учебниках, предшествовавших ныне действующим: ни один учитель никогда не жаловался тогда на то, что умножение и деление, скажем, в пределах 20 непосильно для первоклассников. Достойно внимания еще и то, что в школах других стран, где обучение начинается с 6 лет, к первому учебному году относят начальное знакомство со всеми четырьмя действиями арифметики. Математика опирается прежде всего на четыре действия, и чем раньше они будут включены в практику мышления школьника, тем устойчивее и надежнее будет последующее развертывание курса математики.

Справедливости ради надо отметить, что в первых вариантах учебников М. И. Моро для I класса предусматривалось умножение и деление. Однако делу помешала случайность: авторы новых программ настойчиво держались за одну «новинку»— охват в I классе всех случаев сложения и вычитания в пределах 100 (37+58 и 95—58 и т. п.). Но, поскольку времени на изучение такого расширенного объема сведений не хватило, было решено сдвинуть умножение и деление полностью на следующий год обучения.

Итак, увлечение линейностью программы, т. е. чисто количественным расширением знаний (те же самые действия, но с бо́льшими числами), заняло то время, которое ранее отводилось на качественное углубление знаний (изучение всех четырех действий в пределах двух десятков). Изучение умножения и деления уже в I классе означает качественный скачок мышления, поскольку это позволяет освоить свернутые мыслительные процессы.

По традиции, раньше выделялось в особую тему изучение действий сложения и вычитания в пределах 20. Необходимость этого подхода в систематизации знаний видна даже из логического анализа вопроса: дело в том, что полная таблица сложения однозначных чисел развертывается в пределах двух десятков (0+1=1, ...,9+9=18). Таким образом, числа в пределах 20 образуют в

своих внутренних связях завершенную систему отношений; отсюда понятна целесообразность сохранения «Двадцати» в виде второй целостной темы (первая такая тема — действия в пределах первого десятка).

Обсуждаемый случай — именно тот, когда *концентричность* (сохранение второго десятка в качестве особой темы) оказывается более выгодной, чем *линейность* («растворение» второго десятка в теме «Сотня»).

В учебнике М. И. Моро изучение первого десятка разделено на два изолированных раздела: сначала изучается состав чисел первого десятка, а в следующей теме рассматриваются действия в пределах 10. В нашем учебнике в противовес этому осуществлено совместное изучение нумерации, состава чисел и действий (сложение и вычитание) в пределах 10 сразу в одном разделе. При таком подходе применяется монографическое изучение чисел, а именно: в пределах рассматриваемого числа (например, 3) сразу же постигается вся «наличная математика»: $1+2=3$; $2+1=3$; $3-1=2$; $3-2=1$.

Если по действующим программам на изучение первого десятка отводилось 70 ч, то в нашем опыте экспериментального обучения весь этот материал был изучен за 50 ч (причем сверх программы были рассмотрены некоторые дополнительнные понятия, отсутствующие в стабильном учебнике, но структурно связанные с основным материалом).

Особого внимания в методике начального обучения требует вопрос о классификации задач, о названиях их типов. Поколения методистов трудились над упорядочением системы школьных задач, над созданием их эффективных типов и разновидностей, вплоть до подбора удачных терминов для названий задач, предусмотренных для изучения в школе. Известно, что не менее половины учебного времени на уроках математики отводится их решению. Школьные задачи, безусловно, нуждаются в систематизации и классификации. Какого вида (типа) задачи изучать, когда изучать, какой их тип изучать в связи с прохождением того или иного раздела — это законный объект исследования методики и центральное содержание программ. Значимость этого обстоятельства видна из истории методики математики.

В экспериментальных учебных пособиях автора уделено специальное внимание классификации задач и распределению необходимых их видов и разновидностей для обучения в том или ином классе. В настоящее время классические названия видов задач (на нахождение суммы, неизвестного слагаемого и т. п.) исчезли даже из оглавления стабильного учебника I класса. В нашем пробном учебнике эти названия «работают»: они полезны как дидактические вехи не только для школьника, но и для учителя. Приведем содержание первой темы нашего пробного учебника математики, для которой характерна логическая полнота понятий.

*Первый десяток*

Сравнение понятий выше — ниже, левее — правее, между, короче — длиннее, шире — уже, толще — тоньше, старше — моложе, дальше — ближе, медленнее — быстрее, легче — тяжелее, мало — много.

Монографическое изучение чисел первого десятка: название, обозначение, сравнение, откладывание чисел на счетах и обозначение чисел на числовом луче; знаки: равно (=), не равно (≠), больше (>), меньше (<).

Прямая и кривая линии; окружность и овал.

Точка, прямая, отрезок, обозначение их буквами; измерение длины отрезка и откладывание отрезков заданной длины; обозначение, называние, построение, вырезывание равных треугольников, равных многоугольников. Элементы многоугольника: вершины, стороны, диагонали (обозначение их буквами).

Знакомство с монетами — 1, 2, 3, 5, 10 копеек. Размен монет.

Монографическое изучение чисел в пределах рассматриваемого числа: состав чисел, сложение и вычитание.

Название компонентов сложения и вычитания.

Четверки примеров на сложение и вычитание:

$$3+2=5, \qquad 5-2=3,$$
$$2+3=5, \qquad 5-3=2.$$

Деформированные примеры (с пропущенными числами и знаками):

$$\square+5=7;\ 6-\square=4; \qquad \square+2-\square=4; \qquad 6=3\triangle 2.$$

Решение задач на нахождение суммы и слагаемого, разности, уменьшаемого и вычитаемого. Составление и решение взаимно-обратных задач.

Тройка задач: на увеличение и уменьшение числа на несколько единиц и на разностное сравнение. Сравнение отрезков по длине.

Переместительный закон сложения. Изменение суммы в зависимости от изменения одного слагаемого. Условие, когда сумма не изменяется. Простейшие буквенные выражения: $a+\square=\square+a$, $a+0=a$, $a-a=0$.

Составление и решение задач по выражению.

В последующем изложении рассмотрим основные вопросы методики изложения этого начального раздела школьной математики, имея в виду, что методика изложения последующих разделов во многом должна быть аналогична процессу освоения материала первой темы.

## § 12. СРАВНЕНИЕ (ПРОТИВОПОСТАВЛЕНИЕ) ПОНЯТИЙ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

На первых же занятиях учитель должен поставить перед собой цель научить школьника применять пары понятий, содержание которых раскрывается в процессе составления соответствующих предложений с этими словами. (Вначале осваиваем сравнение на качественном уровне, без употребления чисел.)

Приведем примеры наиболее распространенных пар понятий, которыми надо пользоваться на уроках не только математики, но и развития речи:

**больше — меньше,**
**выше — ниже,**
**шире — уже,**
**правее — левее,**
**старше — моложе,**
**длиннее — короче,**
**тяжелее — легче,**
**толще — тоньше,**
**дальше — ближе,**
**быстрее — медленнее и т. п.**

При работе над такими парами понятий важно использовать не только иллюстрации в учебнике, но и наблюдения детей; так, например, из окна класса они видят, что за рекой стоит дом, и составляют фразы: «Река ближе к школе, чем дом, а дом дальше от школы, чем река».

Пусть ученик подержит в руке попеременно книгу и тетрадь. Учитель спрашивает: что тяжелее — книга или тетрадь? Что легче? «Книга *тяжелее* тетради, а тетрадь *легче* книги».

Выстроив перед классом рядом самого высокого и самого низкого ученика класса, составляем тут же две фразы: «Миша выше Коли, а Коля ниже Миши».

В этих упражнениях важно добиваться грамматически правильной замены одного суждения ему двойственным: «Каменный дом выше деревянного, значит, деревянный дом ниже каменного».

При ознакомлении с понятием «длиннее — короче» можно показать сравнение предметов по длине наложением одного на другой (что длиннее: ручка или пенал?).

На уроках арифметики и развития речи полезно решать логические задачи, преследующие цель научить пользоваться противоположными понятиями: «Кто старше: отец или сын? Кто моложе: отец или сын? Кто из них родился раньше? Кто позже?»; «Сравните книгу и портфель по ширине. Что шире: книга или портфель? Что у́же — книга или портфель? Что тяжелее: книга или портфель?»

Обучение процессу сравнения можно сделать более интересным, вводя так называемые матричные (табличные) упражнения. На доске строится таблица из четырех клеток и разъясняется смысл понятий «столбец» и «строка». Вводим понятия «левый столбец» и «правый столбец», «верхняя строка» и «нижняя строка» (рис. 31).

Вместе с учащимися показываем (имитируем) смысловое толкование этих понятий.

— Покажите столбец (дети двигают рукой сверху вниз).

— Покажите левый столбец, правый столбец (дети проводят два маха рукой сверху вниз).

— Покажите строку (мах рукой слева направо).

— Покажите верхнюю строку, нижнюю строку (два маха рукой, показывающие верхнюю строку, нижнюю строку).

Надо добиваться того, чтобы учащиеся точно указывали положение клетки: «верхняя левая клетка», «нижняя правая клетка» и т. п. Тут же решается обратная задача, а именно: учитель указывает на какую-нибудь клетку таблицы (матрицы), ученик дает соответствующее название этой клетки. Так, если указано на клетку, лежащую в пересечении верхней строки и левого столбца, то ученик должен назвать: «Верхняя левая клетка». Подобные упражнения постепенно приучают детей к пространственной

| | Левый столбец | Правый столбец |
|---|---|---|
| Верхняя строка | ? ① | ② |
| Нижняя строка | → ③ | ↓ Правая нижняя клетка ④ |

**Рис. 31**

ориентировке и имеют важное значение при изучении впоследствии координатного метода математики.

На основе таких простейших наблюдений можно познакомить учащихся с возникновением силлогизмов, представляющих собой самую распространенную форму логических умозаключений.

Вот построение силлогизма на основе сравнения длин трех разноцветных полосок (карандашей):

*Первое рассуждение:*

1. Черный карандаш короче синего карандаша.
2. Синий карандаш короче красного карандаша.

Значит, черный карандаш (тем более!) короче красного карандаша.

*Второе рассуждение:*

1. Красный карандаш длиннее синего карандаша.
2. Синий карандаш длиннее черного карандаша.

Значит, красный карандаш (тем более!) длиннее черного карандаша.

Заметим: средний термин «синий карандаш» содержится в составе обоих суждений, т. е. в первой и второй посылках, но он не входит в заключение. Данное рассуждение полезно сначала сопровождать конкретным сравнением трех предметов, а затем можно предложить решить логическую задачу словесно, без демонстраций, без показа предметов, воображая (представляя) соответствующие образы.

1. Дом короче сарая.
2. Сарай короче ограды.

Значит, дом ... ограды.

(Требуется сравнить длину дома с длиной ограды: что из них короче?)

Поучительны также логические упражнения с понятиями, заключенными в таблицу, классифицирующую понятия по двум основаниям; такие задания вызывают повышенный интерес учащихся.

В качестве примера приведем таблицу, в которой учтено деление птиц по двум основаниям: как по среде обитания (водоплавающие — неводоплавающие), так и по образу жизни (домашние — дикие).

Образ жизни птиц

| Среда обитания птиц | Домашние | Дикие |
|---|---|---|
| Водоплавающие | Гуси | Гагары |
| Неводоплавающие | Индюки | Воробьи |

В таблице можно поместить рисунки соответствующих птиц. Рассматривая такую таблицу, учащиеся отвечают на вопросы двух родов: 1) какая птица индюк? (Индюк — неводоплавающая домашняя птица.) Но надо тут же поставить и структурно противоположный вопрос: 2) назвать дикую неводоплавающую птицу. (Дикая неводоплавающая птица — это воробей.) И т. п.

## § 13. ИЗУЧЕНИЕ ЧИСЛОВОГО РЯДА

Большое значение для первых уроков начальной математики имеет работа над числовым рядом.

Рост числового ряда прибавлением по единице удобно иллюстрировать перемещением вправо по числовому лучу (рис. 32).

Если знак (+) связывается с перемещением по числовому ряду вправо на единицу, то знак (—) связывается с обратным перемещением влево на единицу и т. п. (Поэтому оба знака показываем одновременно на одном и том же уроке.)

Работая с числовым рядом, вводим понятия: начало числового ряда (число нуль) представляет левый конец луча; числу 1 соответствует единичный отрезок, который надо изобразить отдельно от числового ряда.

Пусть учащиеся работают с числовым рядом в пределах трех.

Выделяем два каких-либо соседних числа, например 2 и 3. Переходя от числа 2 к числу 3, дети рассуждают так: «За числом 2 следует число 3». Переходя от числа 3 к числу 2, они говорят: «Перед числом 3 идет число 2» или: «Число 2 предшествует числу 3».

Такой метод позволяет определить место данного числа по отношению как к предыдущему, так и к последующему числу; уместно тут же обратить внимание на относительность положения числа, например: число 3 одновременно является как последующим (за числом 2), так и предыдущим (перед числом 4).

Указанные переходы по числовому ряду надо связать с соответствующими арифметическими действиями.

Например, фраза «За числом 2 следует число 3» изображается символически так: $2+1=3$; однако психологически выгодно создать сразу вслед за ней противоположную связь мыслей, а именно: выражение «Перед числом 3 идет число 2» подкрепляется записью: $3-1=2$.

Чтобы добиться понимания места какого-либо числа в числовом ряду, следует предлагать парные вопросы:

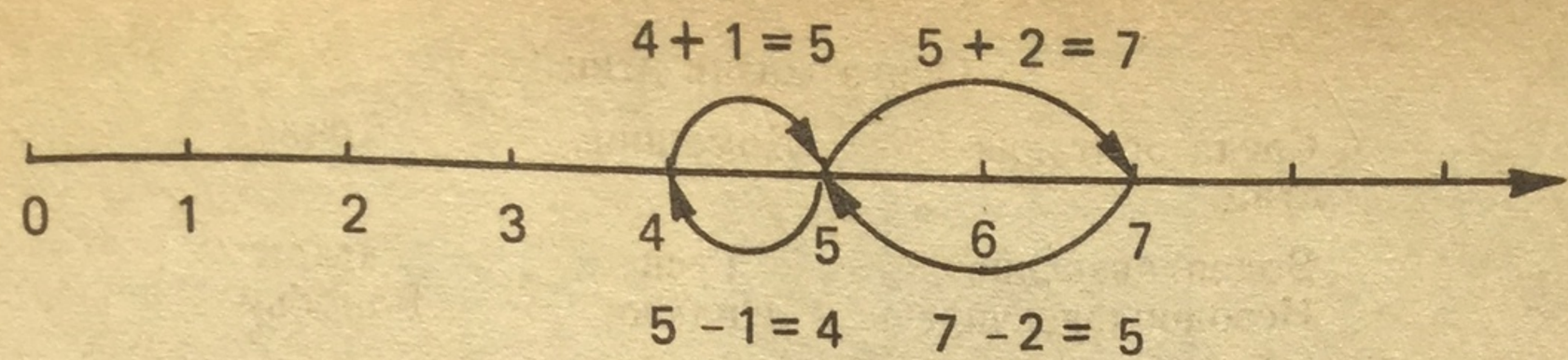



Рис. 32

1. *За* каким числом следует число 3? (Число 3 следует за числом 2.) *Перед* каким числом расположено число 2? (Число 2 расположено перед числом 3.)

2. Какое число следует *за* числом 2? (За числом 2 следует число 3.) Какое число идет *перед* числом 3? (Перед числом 3 идет число 2.)

3. *Между* какими числами находится число 2? (Число 2 находится между числом 1 и числом 3.) Какое число находится между числами 1 и 3? (Между числами 1 и 3 находится число 2.)

В этих упражнениях математическая информация заключена в служебных словах: *перед, за, между*.

Работу с числовым рядом удобно сочетать со сравнением чисел по величине, а также со сравнением положения чисел на числовой прямой. Постепенно вырабатываются связи суждений геометрического характера: число 4 находится на числовой прямой правее числа 3; значит, 4 больше 3. И наоборот: число 3 находится на числовой прямой левее числа 4; значит, число 3 меньше числа 4. Так устанавливается связь между парами понятий: правее — больше, левее — меньше.

Из изложенного выше мы видим характерную черту укрупненного усвоения знаний: весь набор понятий, связанных со сложением и вычитанием, предлагается совместно, в своих непрерывных переходах (перекодировках) друг в друга.

Главным средством овладения числовыми соотношениями в нашем учебнике являются цветные бруски; их удобно сравнить по длине, устанавливая, на сколько клеток больше или меньше их в верхнем или в нижнем бруске. Иначе говоря, понятие «разностное сравнение отрезков» мы не вводим как особую тему, но учащиеся знакомятся с ним в самом начале изучения чисел первого десятка. На уроках, посвященных изучению первого десятка, удобно использовать цветные бруски, которые позволяют выполнять пропедевтику основных видов задач на действия первой ступени.

Рассмотрим пример.

Пусть друг на друга наложены два цветных бруска, разделенных на клетки: в нижнем — 3 клетки, в верхнем — 2 клетки (рис. 33). Сравнивая количество клеток в верхнем и нижнем брусках, учитель составляет два примера на взаимнообратные действия (2+1=3, 3—1=2), причем решения этих примеров прочитываются попарно всеми возможными способами:

*2+1=3*

а) к 2 прибавить 1 — получится 3;
б) 2 увеличить на 1 — получится 3;

*3—1=2*

а) из 3 вычесть 1 — получится 2;
б) 3 уменьшить на 1 — получится 2;

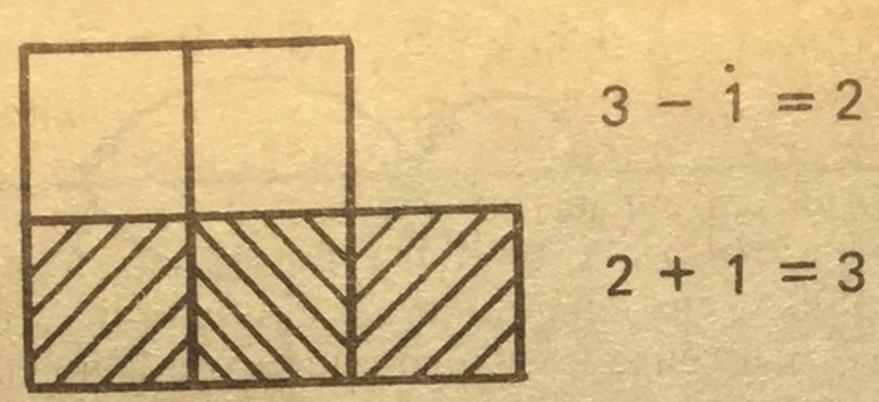



Рис. 33

в) 3 больше 2 на 1;
г) 2 да 1 будет 3;
д) число 2 сложить с числом 1 — получится 3.

в) 2 меньше 3 на 1;
г) 3 без 1 будет 2;
д) из числа 3 вычесть число 1 — получится 2.

*Учитель.* Если 2 увеличить на 1, то сколько получится?

*Ученик.* Если 2 увеличить на 1, то получится 3.

*Учитель.* А теперь скажите, что надо сделать с числом 3, чтобы получить 2?

*Ученик.* 3 уменьшить на 1, получится 2.

Обратим здесь внимание на необходимость в этом диалоге методически грамотного осуществления операции противопоставления.

Уверенное овладение детьми смыслом парных понятий (прибавить — отнять, увеличить — уменьшить, больше — меньше, да — без, сложить — вычесть) достигается благодаря использованию их на одном уроке, на базе одной и той же тройки чисел (например, 2+1=3, 3—1=2), на основе одной демонстрации — сравнения длин двух брусков.

В этом принципиальное отличие методической системы укрупнения единиц усвоения от распространенной ныне системы раздельного изучения этих базисных понятий, при которой контрастные понятия математики вводятся, как правило, порознь в речевую практику учащихся. Так, скажем, в журнале «Начальная школа» (1984, № 10) автор существующего учебника математики для I класса М. И. Моро рекомендует целый урок изучать только увеличение числа на 1, а через сутки, на другом уроке — уменьшение числа на 1. Между тем дело заключается в том, что содержание этих базисных понятий «больше — меньше» постигается детьми через «свое другое», как говорят философы: «плюс» предполагает наличие «минуса», увеличение на несколько единиц предполагает возможность преобразования задачи, переформулирования ее с использованием контрастной операции — уменьшения на столько же единиц и т. п.

Пусть решены следующие две задачи: 1) к 4 палочкам прибавить 1 палочку — получится 5 палочек: 4+1=5; 2) из 5 палочек вычесть 1 палочку — получится 4 палочки: 5—1=4.

Крайне важно сопровождать вначале эти операции конкретными действиями, реальными перемещениями предметов: прибавляя единицы, ученик придвигает к сосчитанной группе один предмет движением руки справа налево (движение при этом совершается как можно медленнее); обозрев результат этой операции (получилось 5 палочек), учащийся выполняет затем обратную операцию.

*Учитель.* Сколько у тебя палочек?

*Ученик.* У меня получилось 5 палочек.

*Учитель.* Как ты получил 5 палочек?

*Ученик.* К 4 палочкам прибавил 1 палочку — получилось 5 палочек.

*Учитель.* А теперь от 5 палочек отними 1 палочку. Сколько получилось?

Ученик отодвигает от группы той же рукой 1 палочку (движением слева направо). От 5 палочек отнять 1 палочку — получится 4 палочки. При таком противопоставлении обратная операция выполняется сразу же за прямой (не только «движением мыслей», но и реальным движением руки).

Итак, придвигаем палочку справа налево — прибавляем 1; тем самым исходное множество из $a$ предметов увеличивается на 1; новое множество состоит из $a+1$ предметов; отодвигаем палочку слева направо — убавляем 1 (исходное множество из $a+1$ предметов уменьшается на 1, становится снова множеством из $a$ предметов).

Существенно здесь еще и то, что в связи с изменением направления движения руки заменяется первоначальный глагол «прибавить» антонимом «отнять»: к 4 прибавить 1, получится 5; от 5 отнять 1, получится 4.

Опыт обучения показывает преимущества одновременного введения пар взаимно противоположных понятий начиная с самых первых уроков арифметики.

Так, например, одновременное употребление трех глаголов: «прибавить» (к 2 прибавить 1), «сложить» (число 2 сложить с числом 1), «увеличить» (2 увеличить на 1), которые изображаются символически одинаково ($2+1=3$), помогает детям усвоить сходство, близость этих слов по смыслу (подобные рассуждения можно провести относительно слов «отнять», «вычесть», «уменьшить» по отношению к примеру 3—1).

Точно так же сущность разностного сравнения усваивается в ходе многократного использования сравнения пар чисел с самого начала обучения, причем в каждой части диалога на уроке используются все возможные словесные формы истолкования решенного примера: «Что больше: 2 или 3? На сколько 3 больше 2? Сколько надо прибавить к 2, чтобы получить 3?» и т. п. Большое значение для овладения смыслом этих понятий имеет изменение грамматических форм, частое использование вопросительных форм.

Так, например, в связи с решением примеров $3+1=4$ и $4-1=3$ могут быть предложены следующие парные вопросы:

$$3+\square=4$$

1) На сколько надо увеличить число 3, чтобы получить 4?
2) Некоторое число больше 3 на 1. Какое это число?
3) Какое действие надо выполнить, чтобы число увеличилось? (Сложение.)
4) Сравните числа 4 и 3. Какое число больше и на сколько больше?

$$3+1=\square.$$

5) Дано число 3. Назовите последующее число. И т. д.

$$4-\square=3$$

1) На сколько надо уменьшить число 4, чтобы получить 3?
2) Неизвестное число меньше 4 на 1. Найти это число.
3) Какое действие надо выполнить, чтобы число уменьшить? (Вычитание.)
4) Сравните числа 4 и 3. Какое число меньше и на сколько меньше?

$$\square+1=4.$$

5) Дано число 4. Назовите предыдущее число. И т. д.

Многолетнее испытание нашего учебника математики показало преимущества *монографического изучения* чисел первого десятка. Каждое очередное число при этом подвергается многостороннему анализу, с перебором всех возможных вариантов его образования; в пределах этого числа выполняются все возможные действия, повторяется «вся наличная математика», используются все допустимые грамматические формы выражения зависимости между числами. Разумеется, при этой системе изучения в связи с

охватом последующих чисел повторяются ранее изученные примеры, т. е. расширение числового ряда осуществляется с постоянным повторением ранее рассмотренных сочетаний чисел и разновидностей простых задач.

## § 14. СОВМЕСТНОЕ ИЗУЧЕНИЕ СЛОЖЕНИЯ ЧИСЕЛ И РАЗЛОЖЕНИЯ ЧИСЛА НА СЛАГАЕМЫЕ

В методике начальной математики упражнения на эти две операции обычно рассматриваются раздельно. Между тем наша практика обучения показала превосходство одновременного изучения двуединой операции «сложение — разложение на слагаемые».

Пусть учащиеся решили задачу на сложение: «К трем палочкам прибавить 1 палочку — получится 4 палочки». Вслед за этой задачей сразу же следует поставить вопрос: «Из каких чисел *состоит* число 4?» 4 палочки состоят из 3 палочек (ребенок отсчитывает 3 палочки) и 1 палочки (отделяет еще 1 палочку).

Исходным упражнением может быть и разложение числа. Учитель спрашивает: «Из каких чисел состоит число 5?» (Число 5 состоит из 3 и 2.) И тотчас же предлагается вопрос про те же числа: «Сколько получится, если к 3 прибавить 2?» (К 3 прибавить 2 — получится 5.)

Для этой же цели полезно практиковать чтение примеров в двух направлениях: $5+2=7$. К 5 прибавить 2, получится 7 (читаем слева направо). 7 состоит из слагаемых 2 и 5 (читаем справа налево). Неразумно, конечно, отрывать друг от друга эти взаимно-обратные суждения промежутком в месяц, как это сейчас делается по учебникам М. И. Моро.

$$\overrightarrow{\underleftarrow{5+2=7}}$$

Словесное противопоставление полезно сопровождать такими упражнениями на классных счетах, которые позволяют видеть конкретное содержание соответствующих операций. Вычисления на счетах незаменимы как средство визуализации действий над числами, причем величина чисел в пределах 10 здесь ассоциируется с длиной совокупности косточек, расположенных на одной проволоке (эта длина воспринимается учеником зрительно). Нельзя согласиться с таким «новаторством», когда в действующих учебниках и программах полностью отказались от использования на уроках русских счетов.

Так, при решении примера на сложение ($5+2=7$) ученик сначала отсчитывал на счетах 5 косточек, затем к ним присоединял 2 и после этого объявлял сумму: «К 5 прибавить 2 — получится 7» (название полученного числа 7 при этом ученик устанавливает пересчетом новой совокупности: «Один — два — три — четыре — пять — шесть — семь») (рис. 34).

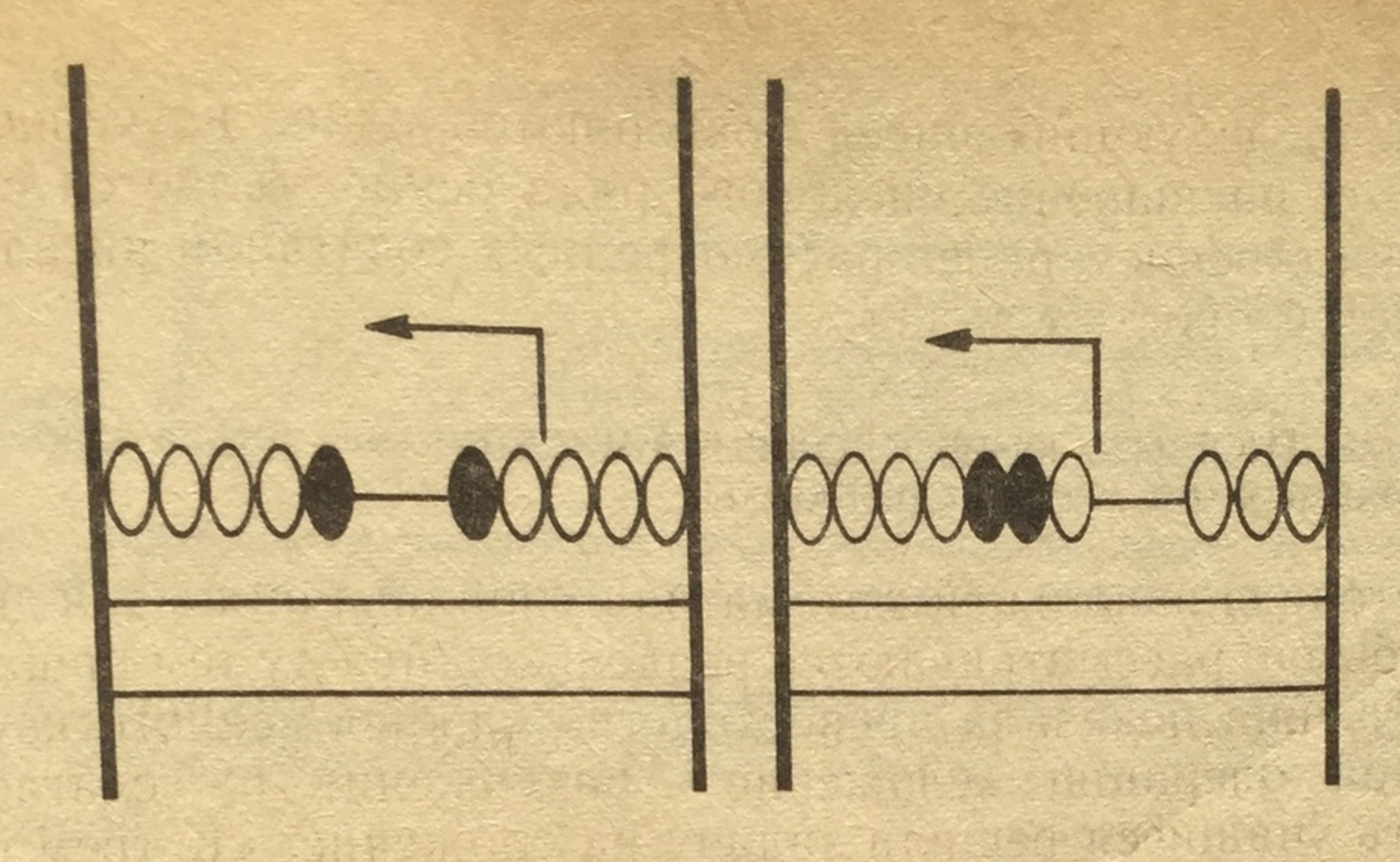


**Рис. 34**

*Ученик.* К 5 прибавить 2 — получилось 7.

*Учитель.* А теперь покажи, из каких слагаемых состоит число 7.

*Ученик* (сначала отделяет две косточки вправо, потом говорит). Число 7 состоит из 2 и 5.

Выполняя данные упражнения, целесообразно употреблять с самого начала понятия «первое слагаемое» (5), «второе слагаемое» (2), «сумма».

Предлагаются задания следующих видов: а) сумма двух слагаемых равна 7; найти слагаемые; б) из каких слагаемых состоит число 7?; в) разложите сумму 7 на 2 слагаемых (на 3 слагаемых). И т. д.

Усвоение переместительного закона сложения требует разнообразных упражнений, основанных вначале на практических манипуляциях с предметами.

*Учитель.* Возьмите в левую руку 3 палочки, а в правую — 2. Сколько всего стало палочек?

*Ученик.* Всего стало 5 палочек.

*Учитель.* Как подробнее сказать об этом?

*Ученик.* К 3 палочкам прибавить 2 палочки — будет 5 палочек.

*Учитель.* Составьте этот пример из разрезных цифр. (Ученик составляет пример: $3+2=5$.)

*Учитель.* А теперь поменяйте местами палочки: палочки, лежащие в левой руке, переложите в правую, а палочки из правой руки переложите в левую. Сколько теперь палочек в двух руках вместе?

*Ученик.* Всего в двух руках было 5 палочек, и сейчас получилось снова 5 палочек.

*Учитель.* Почему так получилось?

*Ученик.* Потому, что мы никуда не откладывали и не добавляли палочки. Сколько было, столько и осталось.

*Учитель.* Составьте из разрезных цифр решенные примеры.

*Ученик* (откладывает: $3+2=5$, $2+3=5$). Здесь было число 3, а теперь число 2. А здесь было число 2, а теперь число 3.

*Учитель.* Мы поменяли местами числа 2 и 3, а результат остался прежним: 5. (Из разрезных цифр складывается пример: $3+2=2+3$.)

Переместительный закон усваивается также в упражнениях по разложению числа на слагаемые.

*Учитель.* Отсчитайте 7 кружочков. Отделите 3 кружочка влево. Сколько кружочков слева?

*Ученик.* Слева 3 кружочка.

*Учитель.* Сколько кружочков справа?

*Ученик.* Справа 4 кружочка.

*Учитель.* Из каких чисел состоит число 7?

*Ученик.* Число 7 состоит из 3 и 4 $(3+4=7)$.

*Учитель.* Покажите рукой, в каком направлении мы читали пример. (Учащийся двигает рукой слева направо.)

*Учитель.* А теперь показывайте рукой в обратном направлении: справа налево. Сколько кружочков справа? Сколько кружочков слева? Из каких чисел состоит число 7?

*Ученик.* Число 7 состоит из 4 и 3 $(3+4=4+3)$.

*Учитель.* Отложите 5 красных палочек, положите справа еще 2 желтые. Пересчитайте. Сколько всего?

*Ученик.* Всего 7 палочек.

*Учитель.* Отложите сначала 2 желтые палочки, потом приложите справа столько красных, сколько было в первый раз. Сколько же красных палочек надо прибавить? Сколько всего стало палочек? Что вы заметили? Составьте пример к первой задаче. Составьте пример ко второй задаче.

Полезно также привести наблюдения над примером, записанным или составленным из разрезных цифр.

Учитель записывает на доске пример: $5+2$. Учащийся решает его просчитыванием по единице:

$$5+1=6, \qquad 6+1=7.$$

После этого пример записывается полностью: $5+2=7$.

*Учитель.* Прочитайте пример.

*Ученик.* К 5 прибавить 2 — получится 7.

*Учитель.* Составьте из тех же чисел другой пример на сложение так, чтобы получилось число 7.

*Ученик.* К 2 прибавить 5 — получится 7: $2+5=7$.

*Учитель.* Мы прочитали эти примеры слева направо. Прочитайте их справа налево.

Составляется равенство $5+2=2+5$.

В связи с изучением переместительного закона повторяются понятия «слагаемые» и «сумма». Учащиеся заучивают определения: «Числа, которые складывают, называются *слагаемыми*», «Число, которое получается при сложении, называется *суммой*».

Напишем пример по-другому: $5+2=7$. Здесь 5 — первое слагаемое, 2 — второе слагаемое, 7 — сумма. Этот же пример важно проиллюстрировать на цветных брусках (рис. 35). Пусть слева красный брусок из 5 кубиков; справа приставим зеленый брусок из 2 кубиков. Всего получилось 7 кубиков.

Теперь, оставив на месте зеленый брусок из 2 кубиков, переносим слева направо красный брусок из 5 кубиков.

*Учитель.* Прочитайте новый пример.

*Ученик.* К 2 зеленым кубикам прибавить 5 красных кубиков — получится всего 7 кубиков.

$$5+2=7, \qquad 5+2=$$
$$2+5=7. \qquad 2+5=$$

Описанная демонстрация переместительности суммы — самая информативная и убедительная для детей. После этого формулируется правило: «От перестановки слагаемых сумма не изменяется».

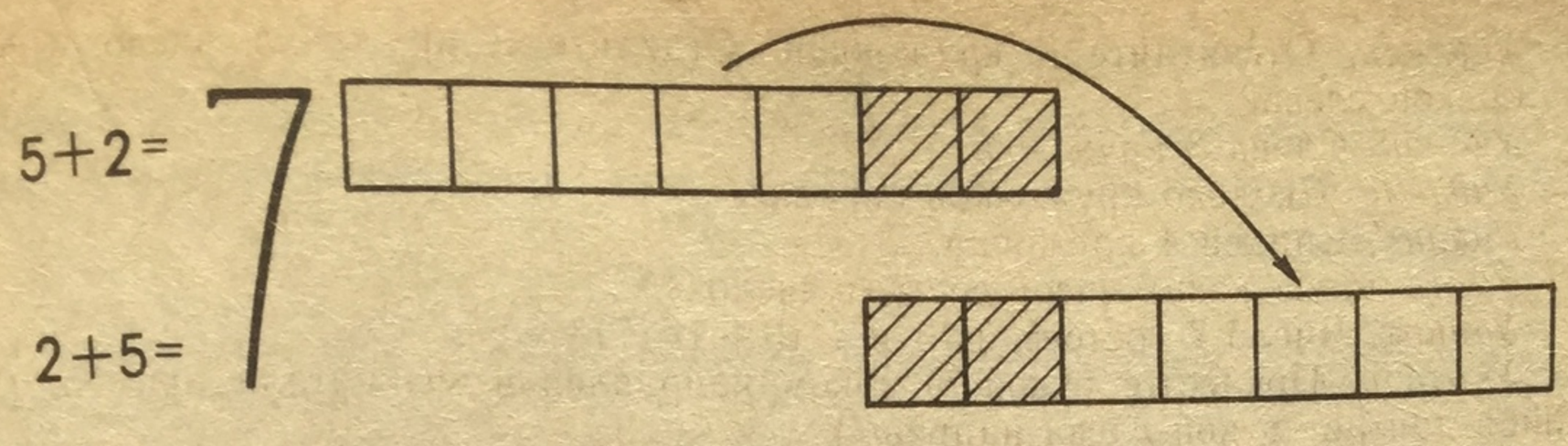



**Рис. 35**

Впоследствии для переместительного закона сложения учитель вводит буквенную запись, заменяя равные слагаемые одной и той же буквой:

$$5+2=2+5,$$
$$a+b=b+a.$$

Однако, прежде чем переходить к буквенной записи переместительного закона, полезно записать вместо чисел геометрические фигуры, например квадрат и треугольник. Написав внутри квадрата одно и то же слагаемое, например 6, а внутри треугольника 1, получаем равенство

$$\square+\triangle=\triangle+,$$
$$6+1=1+6.$$

Целесообразно провести и следующую беседу.

Запишем сначала равенство с пропущенными элементами:

$$\square+3=3+\square.$$

Обращаем внимание на то, что первое слагаемое в левой части и второе слагаемое в правой части совпадают. Возникает вопрос: какое число можно записать внутри клетки?

Проводим наблюдения:

$$\square+3=3+\square,$$
$$1+3=3+1,$$
$$2+3=3+2,$$
$$5+3=3+5,$$
$$a+3=3+a.$$

Выясняем: внутри клетки слева и справа оказывается одно и то же число: если в левой части равенства внутри клетки записано число 2 (или $a$), то и в правой части равенства внутри клетки оказывается то же самое число 2 (или $a$). Результат наблюдения запишем так: $a+3=3+a$.

Затем переходим к общепринятой буквенной записи переместительного закона. Пусть первое слагаемое обозначено буквой $a$, второе слагаемое — буквой $b$. Запишем числовые и буквенные равенства друг под другом:

$$3+4=4+3,$$
$$a+b=b+a.$$

Читаем: сумма чисел $a$ и $b$ равна сумме чисел $b$ и $a$.

Постепенное введение обобщенных записей в буквах достигается при непрерывных переходах от конкретного и частного ($5+2=2+5$) к обобщенному и абстрактному ($a+b=b+a$), и наоборот.

Для начального обучения математике очень важен вопрос:

когда вводить переместительный закон сложения?

Главная цель обучения сложению — уже в пределах первого десятка — постоянно подчеркивать роль переместительного закона в упражнениях.

Пусть вначале дети отсчитали 6 палочек; затем к ним прибавляем три палочки и пересчетом («семь — восемь — девять») устанавливаем сумму: 6 да 3 — будет 9. Необходимо немедленно тут же предложить новый пример: 3+6; новую сумму вначале можно установить опять же пересчетом (т. е. самым примитивным путем), но постепенно и целенаправленно следует формировать способ решения на высшем коде, т. е. логически, без пересчета.

Если 6 да 3 — будет 9 (ответ установлен пересчетом), то 3 да 6 (без пересчета!) — тоже будет 9!

Короче говоря, переместительное свойство сложения надо ввести с самого начала упражнений на сложение разных слагаемых, чтобы стало привычкой составление (проговаривание) решения четверки примеров:

6, 3, 9.

| | |
|---|---|
| 6+3=9, | 9−3=6, |
| 3+6=9, | 9−6=3. |

Составление четверки примеров — это доступное детям средство укрупнения знаний.

Мы видим, что такая важная характеристика операции сложения, как его переместительность, не должна пройти эпизодически, а должна стать основным логическим средством упрочения верных числовых ассоциаций. Главное свойство сложения — переместительность слагаемых — должно рассматриваться постоянно в связи с накоплением в памяти все новых табличных результатов.

Теперь перейдем к обсуждению вопроса о *совместном изучении сложения и вычитания*. Теория этого вопроса уже освещалась в I главе настоящей книги. А что говорят об этом практика и методика обучения на основе УДЕ?

### § 15. ПЕРЕМЕСТИТЕЛЬНЫЙ ЗАКОН СЛОЖЕНИЯ. СОВМЕСТНОЕ ИЗУЧЕНИЕ СЛОЖЕНИЯ И ВЫЧИТАНИЯ

Практика обучения по нашим учебникам показывает, что изучение состава чисел первого десятка и изучение действий сложения и вычитания в тех же пределах выгодно осуществлять одновременно на одних и тех же уроках. Противопоставление двух действий — сложения и вычитания — надо показать вначале в конкретном, наглядном плане, дабы от конкретного можно было подняться затем к абстрактному.

*Учитель.* Смотрите внимательно, что я буду делать. (В ящик, внутренняя часть которого не видна учащимся, опускает книгу, а затем тетрадь.) Что сейчас находится в ящике?

*Дети.* В ящике находятся книга и тетрадь.

*Учитель.* Смотрите дальше, что я буду делать. (Вынимает из ящика тетрадь.) Что я сделал?

*Дети.* Вы вынули из ящика тетрадь.

*Учитель.* А что осталось в ящике?

*Дети.* В ящике осталась книга.

*Учитель.* А теперь смотрите дальше. (Опускает в ящик 3 зеленых круга и 4 красных.) Что я сделал?

*Дети.* Вы опустили в ящик 3 зеленых круга и 4 красных.

*Учитель* (вынимает из ящика 3 зеленых круга). Что осталось в ящике?

*Дети.* В ящике осталось 4 красных круга. (Аналогичную операцию проводит учитель с красными кругами.)

*Учитель* (опускает в ящик сначала 3 палочки, затем еще 2 палочки такого же цвета). Сколько палочек теперь в ящике?

*Дети.* В ящике всего 5 палочек. К 3 палочкам прибавить 2 палочки — получится 5 палочек.

Ученик вынимает из ящика все палочки и проверяет ответ пересчетом, затем снова опускает их в ящик.

*Учитель.* Сколько палочек мы опускали в ящик в первый раз? во второй раз?

*Дети.* В первый раз опускали 3 палочки, во второй раз опускали 2 палочки.

*Учитель.* А теперь я выну из ящика 2 палочки. Сколько там осталось?

*Дети.* Там осталось 3 палочки.

*Учитель.* Как вы узнали?

*Дети.* Всего было 3 и 2 палочки. 2 вынули, 3 осталось.

*Учитель* (обращается ко всему классу). А теперь составьте пример к данной задаче.

*Дети.* Из 5 вычесть 3 — получится 2. (На доске записывается: 5—3=2.)

Такое опытное иллюстрирование взаимно-обратных операций сложения и вычитания заставляет учащегося применять рассуждения, т. е. логические средства исследования. Ученик совершает умозаключение, что «в ящике осталось 2 палочки» без предварительного практического (зрительного) пересчета предметов, не видя их. Это упражнение намеренно построено нами так, чтобы создать аналогию между логической операцией, совершаемой многократно в жизни, и операцией вычисления.

Первое умозаключение: если в ящике были какие-либо два разных предмета, а затем один из них вынули, то в нем останется, несомненно, другой предмет.

Второе умозаключение: если были две группы предметов (соответственно из 3 и 2 предметов), а затем мы отделили первую группу (состоящую из 3 предметов), то там останется вторая группа (из 2 предметов). Анализируя второе умозаключение, мы видим, что в нем отсутствует результат сложения (5 предметов).

Понятно теперь, что при решении примеров вида 5—3= важно разбить число 5 на два слагаемых, одно из которых равно 3:

$$\square + 3 = 5.$$

После удаления множества из 3 предметов в ящике останется множество из 2 предметов:

$$5 - 3 = 2.$$

Чтобы достичь цели обучения обобщению и использовать переход к свернутым формам умозаключений с целью не допустить преждевременной автоматизации вычислений, полезно применять счет группами, заменив им прием пересчета. Счет груп-

пами как кратчайший и основной прием вычислений, наиболее ценен и в образовательном отношении; и он постепенно становится основным при изучении действий над числами.

Пусть решен пример: $7+2=$ .

К 7 прибавить 2: сначала к 7 прибавим 1 — получится 8; к 8 прибавим 1 — получится 9. Значит, к 7 прибавить 2 — получится 9 ($7+2=9$). После решения этого примера мы рассматриваем сразу обратный пример на вычитание: $9-2=$ . Из 9 вычесть 1 — получится 8; из 8 вычесть 1 — получится 7. Значит, из 9 вычесть 2 — получится 7.

Обратим внимание на следующее обстоятельство: если при решении первого примера были использованы связи: $7+1=8$; $8+1=9$, то в решении второго (обратного) примера проявляются соответствующие *обращенные ассоциации*, но в обратной последовательности: $9-1=8$; $8-1=7$. Схематически эти четыре промежуточные операции образуют как бы замкнутый цикл рассуждений, идущих одно за другим (рис. 36). Тем самым достигается слияние двух взаимно-обратных действий как бы в двуединую циклическую операцию:

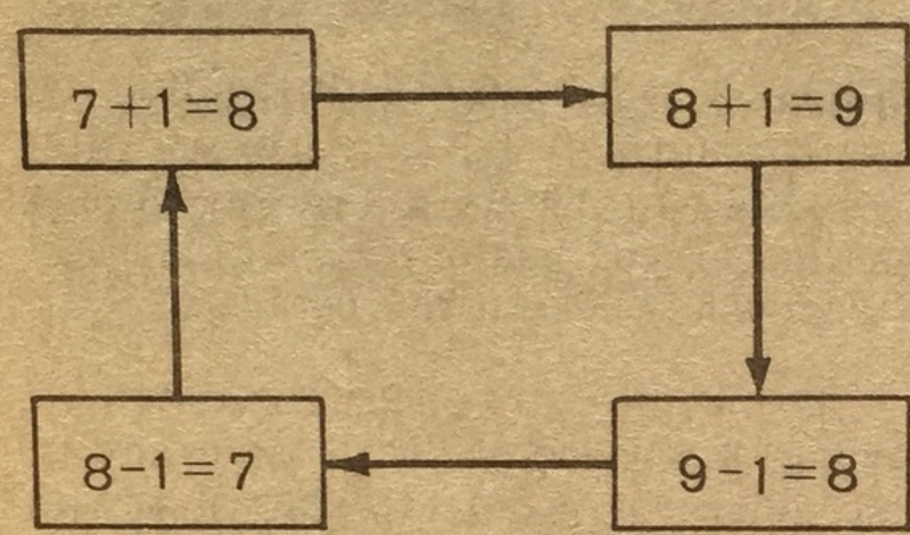



Рис. 36

$$7+2=9 \rightleftarrows 9-2=7.$$

Мы видим: взаимосвязь более сложных вычислительных или логических операций основана на аналогичном попарном родстве (близости) элементарных операций, посредством которых выполняется пара «сложных» операций. Иными словами, явное противопоставление сложных понятий основано на неявном (подсознательном) противопоставлении более простых понятий.

Пусть решен пример присчитыванием группами:

$$5+3=5+1+2=6+2=8.$$

К 5 прибавить 1 — получится 6; к 6 прибавить 2 — получится 8. Значит, к 5 прибавить 3 — получится 8.

Если сразу же вслед за этим примером предложить соответствующий пример на вычитание: $8-3=7-2=6-1$, то решение его сведется к обращению процессов, только что протекших при выполнении сложения.

Итак, совместное решение пары взаимно-обратных примеров

$$5+3=8\downarrow \quad \text{и} \quad 8-3=5\uparrow$$

приводит к подсознательному проявлению следующего замкнутого цикла[1] из

[1] Данная закономерность является общей для методической системы укрупнения. Так, при совместном доказательстве свойства и признака параллелограмма в цепи силлогизмов используются свойства и признаки параллельных прямых. Иначе говоря, при совместном доказательстве свойства и признака параллелограмма поневоле актуализируются (также совместно) известные по предыдущему классу теоремы о свойстве и признаке параллельных прямых и т. п.

четырех операций:

$$\begin{array}{ccc} 5+1=6 & \longrightarrow & 6+2=8 \\ \uparrow & & \downarrow \\ 6-1=5 & \longleftarrow & 8-2=6 \end{array}$$

При методе противопоставления учащийся сам составляет второй пример, исходя из решенного примера на сложение. Условие второго примера он не получил готовым, а сконструировал сам из условия первого примера; взаимосвязь между компонентами действий усваивается детьми как бы поневоле в процессе сравнения, пронизывающего весь двуединый процесс сложения и вычитания.

Примечательно здесь следующее. Осуществляя систематически одновременное изучение сложения и вычитания, мы ожидали, что будет происходить нежелательное, преждевременное свертывание операций, что после решения примера $5+3=8$ двумя операциями ($5+1=6$; $6+2=8$) при вычитании 3 из 8 ученик будет говорить и писать сразу результат без промежуточных операций: «Значит, $8-3=5$».

Нам казалось, что подробное решение исходного примера на сложение ($5+3=5+1+2 = 6+2=8$) будет в мышлении ученика свертываться раньше времени ($5+3=8$), что может отрицательно сказаться на сознательном усвоении материала.

Для нас явилось неожиданностью, что такое нежелательное автоматическое свертывание операций возникает очень редко, причем только у отдельных учеников. Приведем запись беседы на уроке.

Был решен пример: $6+3=9$.

$$6+3=(6+2)+1=8+1=9$$

*Учитель* (ведет беседу с сильным учеником). Прочитай решенный пример: $6+3=9$.

*Ученик.* К 6 прибавить 3 — получится 9.

*Учитель.* Составь пример на вычитание. (Дети приучены вычитать из суммы второе слагаемое.)

*Ученик.* Из 9 вычесть 3 — получится... (Пауза.)

*Учитель* (прерывает). Решай пример дальше. Как ты будешь решать?

*Ученик.* Из 9 вычесть 1 — получится 8; из 8 вычесть 2 — получится 6. Значит, $9-3=6$.

*Учитель.* Прочитай решенный пример.

*Ученик.* Из 9 вычесть 3 — получится 6.

*Учитель.* А мог бы ты сразу решить пример?

*Ученик.* Я знал сразу: получится 6.

*Учитель.* Почему же ты не сказал ответ сразу?

*Ученик.* Сразу нельзя говорить, надо решать (!).

Очевидно, мысль ученика при решении обратного примера на вычитание, по существу, направлена не на получение результата, который ему и так известен. Не в этом он видит смысл упражнений, направленных, как он считает, на заполнение пробелов между условием и искомым результатом, на процесс рассуждения, соединяющий условие и результат:

$$9-3=\ldots=6.$$

Заполнение пробелов схематически выглядит так:

$$9-3=6,$$
$$-\ \ =6,$$

$$-2=6,$$
$$8-2=6,$$
$$-\quad=8,$$
$$9-1=8.$$

Это заполнение пробелов происходит во внутренней речи (в подтексте), а при ответе процесс рассуждения развертывается в обратном направлении:

$$9-1=8;\ 8-2=6;\ 9-3=6.$$

Если сильный ученик находит цель в рассуждениях, в обоснованиях, то внимание слабого ученика зачастую бывает приковано к результату.

*Учитель* (обращается к слабому ученику). Прочитай решенный пример: $6+3=9$.

*Ученик*. К 6 прибавить 3 — получится 9.

*Учитель*. Составь пример на вычитание.

*Ученик*. Из 9 вычесть 3.

*Учитель* (прерывает). Решай пример дальше. Как ты будешь решать?

*Ученик*. Получится 6.

*Учитель*. Ты сказал ответ. Как же надо решать пример?

*Ученик*. Из 9 вычесть 3 — получится 6.

*Учитель*. Вспомни, как мы к числу 6 прибавляли число 3. Иди к счетам.

*Ученик* (считает на счетах). К 6 прибавить 2 — получится 8. К 8 прибавить 1 — получится 9.

*Учитель*. А теперь из числа 9 надо вычесть число 3. Сколько же мы сначала вычтем?

*Ученик*. Сначала вычтем 1, потом вычтем 2. Из 9 вычесть 1 — получится 8.

*Учитель*. А дальше как будешь решать?

*Ученик*. Из 8 вычесть 2 — получится 6.

Анализ решения примера слабым учеником говорит о том, что он затруднялся решить именно обратный пример на вычитание, так как не сумел развернуть в обратном порядке выполненный им же процесс решения примера на сложение. Он не удержал в памяти опорные числа 2 и 1, которые прибавлялись поочередно ($6+2=8$, $8+1=9$), а теперь должны быть вычтены поочередно, но в ином порядке (сначала 1, потом 2).

Лишь восстановление исходной цепи рассуждений учителем помогло школьнику самому открыть способ вычитания.

Мы описали порядок изучения действий, причем сложение было исходным действием, а вычитание — производным.

При повторении важно вести работу над четверкой примеров, исчерпывающих все возможные связи между тремя данными числами.

Пусть решен пример: $7+2=9$.

Учащиеся составляют новый пример на сложение с тем же ответом, поменяв местами слагаемые: $2+7=9$. Далее к каждому примеру составляется обратный пример на вычитание и в тетрадях записывается четверка примеров в таком же порядке (общее число 9 для двух смежных примеров удобно записать однократно цифрой большего размера):

$$\begin{matrix}7+2=\\2+7=\end{matrix}\ 9;\quad 9\ \begin{matrix}-2=7\\-7=2.\end{matrix}$$

Впоследствии четверку примеров можно решать в другой последовательности: сначала записать левый столбец из двух примеров на сложение (применение переместительного закона); затем справа — два соответствующих примера на вычитание второго слагаемого.

При изучении первого десятка вводятся также названия компонентов сложения и вычитания.

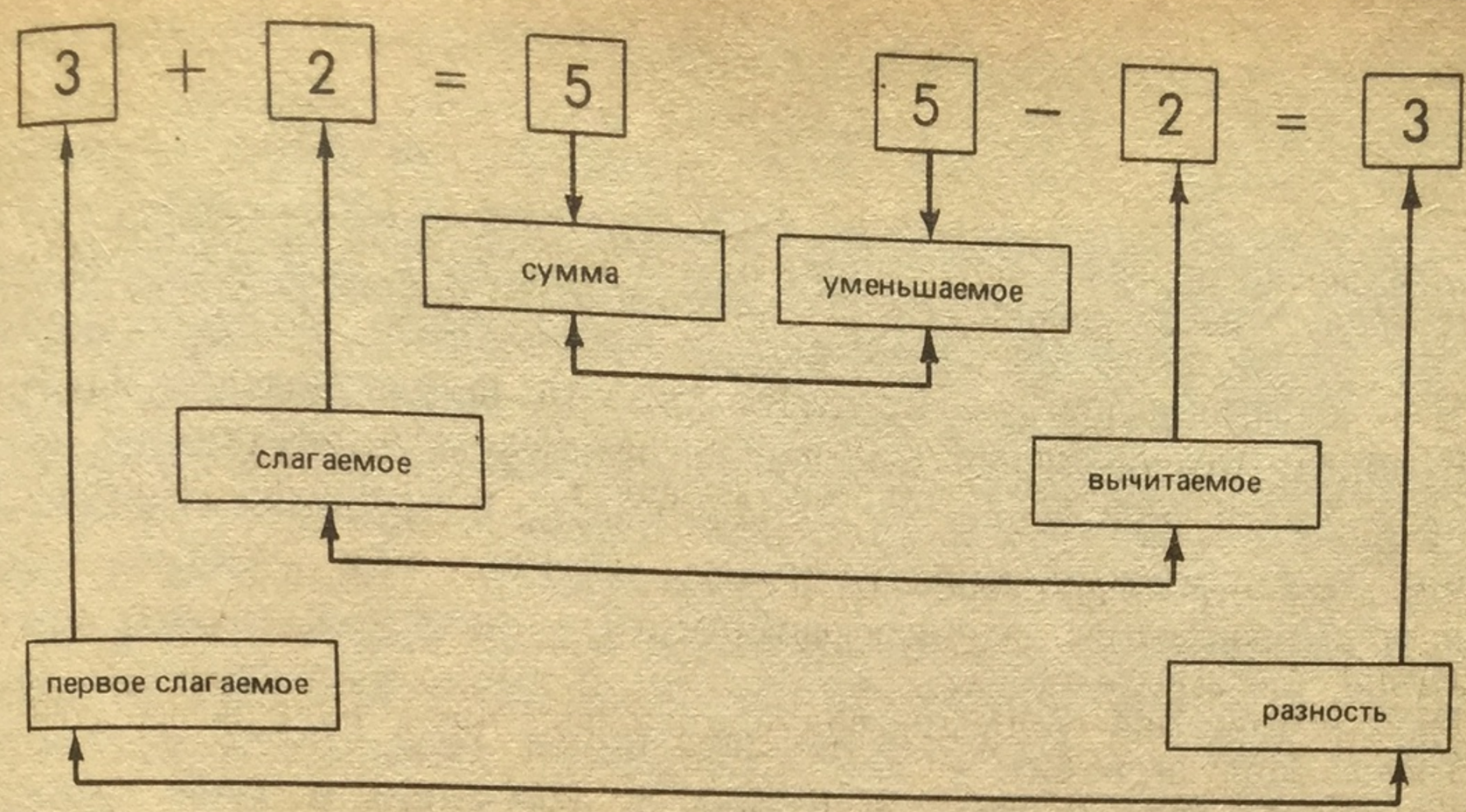



**Рис. 37**

Заучиваются следующие правила: «Число, из которого вычитают, называется *уменьшаемым»,* «Число, которое вычитаем, называется *вычитаемым»,* «Число, которое получается при вычитании, называется *разностью».*

Для усвоения названий компонентов при сложении и вычитании целесообразно запоминать их парами (рис. 37). Надо обратить внимание детей на то, что при преобразовании сложения ($3+2=5$) в вычитание ($5-2=3$) сумма становится уменьшаемым (5); одно слагаемое становится вычитаемым (2), другое — разностью (3).

Для закрепления названий компонентов сложения и вычитания целесообразно предложить учащимся несложные задания.

## § 16. РЕШЕНИЕ ПРИМЕРОВ, В КОТОРЫХ НАДО ОПРЕДЕЛИТЬ ЗНАК ДЕЙСТВИЯ И НЕИЗВЕСТНЫЙ КОМПОНЕНТ

Выше мы рассмотрели своеобразие процесса решения деформированных заданий с одним пропущенным числом вида $\square+2=5$ и выяснили богатство переходов мыслей при нахождении пропущенного компонента. Дальнейшее усложнение структуры неопределенных (деформированных) примеров — предложение их учащимся в такой форме, когда неизвестны знак действия и одно из чисел:

$$8 \triangle \square = 2, \qquad \square \triangle 3 = 6,$$
$$6 \triangle \square = 9, \qquad \square \triangle 7 = 2.$$

В этих примерах ученик сначала подбирает знак на основе сравнения, а затем находит отсутствующий числовой компонент. (Вместо неизвестного знака действия записывается треугольник.)

Решая пример: $8 \triangle \square = 2$, ученик рассуждает про себя примерно так: «8 больше, чем 2; значит, знак «минус» (вычитание); 8

состоит из 2 (данное число) и... 6 (неизвестное число); значит, пример такой: 8—6=2».

Рассуждение ученика при решении четвертого примера □△7=2 будет уже иное: «7 больше, чем 2; если прибавить, то получится больше, чем 7, у нас же в ответе 2, а 2 меньше чем 7; значит, будет знак не сложения, а вычитания. Из чего вычесть? 7 и 2 — будет 9; 7 и 2 — будет 9; значит, вычесть из 9: 9—7=2».

Вообще при решении подобных примеров наибольшее затруднение у детей вызывают те упражнения, в которых первый компонент оказывается неизвестным. (Здесь, так сказать, самый вход в упражнение, начало операции — неопределенно; поэтому не сразу устанавливается кратчайшая цепь ассоциаций, приводящая к ответу.) Каждый из примеров (9△□=2; 6△□=9) имеет одно-единственное решение; к тому же в этих примерах дан первый компонент, поэтому они решаются без затруднений. Приведем фрагмент урока.

*Учитель*. Реши пример: 8△□=6.

*Ученик* (немного подумав, пишет). 8—2=6.

*Учитель*. Почему ты выбрал знак «минус», а не «плюс»?

*Ученик*. Если «плюс», то тогда результат станет еще больше. (Очевидно, ученик сравнил по величине числа 8 и 6 и, обнаружив, что 8 больше 6, остановился на знаке «минус».)

Далее ученик уже дописывает найденное вычитаемое:

8—2=6.

После небольшого числа упражнений у учащихся вырабатывается свернутый прием решения, когда наибольшее число можно сразу разложить на слагаемые. Допустим, предложен пример: 8△□=3. Ученик сразу пишет число 5 (внутри прямоугольника): 8△5=3 (знак «минус» еще не написан).

*Учитель*. Почему получилось 5?

*Ученик*. 5 и 3 — будет 8. (И только потом пишет знак действия: 8—5=3.)

Интересны также пары примеров, имеющих при одинаковой исходной форме два решения.

Так, учитель предлагает два примера:

□△2=
□△2= 4

*Ученик* (быстро находит первое решение). 2+2=4.

*Учитель*. Найди еще одно решение.

*Ученик*. Больше нет!

*Учитель*. Ты нашел решение примера на сложение. Попробуй составить второй пример на вычитание.

*Ученик*. Я знаю: 6—2=4.

Такие парные примеры оказываются полезными для уяснения соотношений, вытекающих из расположения чисел в числовом ряду: числа 2, 4, 6 отстоят друг от друга на один и тот же промежуток, равный двум единицам.

После анализа решения первой пары примеров предлагаются аналогичные примеры, которые решаются значительно быстрее.

Решение таких деформированных примеров предполагает

необходимость самоконтроля, т. е. проверки найденного числа, так как процесс решения начинается здесь с допущения, что выбранное число есть искомое.

Сказанное выше доказывает дидактическую целесообразность использования деформированных примеров с самых первых шагов обучения как одного из важнейших средств развития логического и математического мышления учащихся.

Практика подтверждает, что деформированные примеры могут быть решены и при четырех входящих в них числах (три компонента и результат). Например: $7+\square-\square=5$; $\square+3+\square=10$.

Технологический прием деформации упражнений оказывается хорошим средством активизации мышления учащихся при изучении тождественных преобразований в алгебре. Благодаря заданиям типа $\square-2b=2\ (3a-\square)$ удается совместно изучить такие преобразования, как умножение многочленов, разложение их на множители, действия над алгебраическими дробями.

## § 17. ДЕЙСТВИЯ С НУЛЕМ

Известно, что неумение оперировать с нулем, находящимся в середине или в конце числа, нередко встречается даже у учащихся пятых классов. Причина этого явления заключается в том, что операциям над нулем не уделяется должного внимания в начальных классах.

Число нуль занимает особое место в математике. Введение этого числа связано со скачком в математическом мышлении. Интересно отметить, что в древнегреческой математике обходились без числа нуль. Благодаря открытию числа нуль индийскими математиками стала возможной позиционная запись чисел — величайшее изобретение человеческой мысли.

В своем учебнике для I класса мы поставили целью выяснить возможность раннего расширения множества натуральных чисел, состоящих из 10 элементов (1, 2... 10), до множества целых чисел, состоящего из 11 элементов (0, 1, 2 ... 10). Наши данные говорят о том, что это нововведение вполне доступно учащимся. Такой шаг значительно расширяет и разнообразие числовых комбинаций, используемых в примерах.

В опыте учительницы Л. К. Губаревой, работающей по нашим опытным программам, нуль вводится уже после изучения числа 3 ($3-3=0$, $3+0=3$, $3-0=3$).

При введении нуля удобно за исходное действие взять не вычитание, а сложение.

*Учитель.* Давайте решим задачу: «Папа и мама дали Ване по конверту с марками. Сколько марок дали родители Ване?»

*Дети.* Мы не можем узнать, сколько марок дали Ване.

*Учитель.* Что же надо знать для ответа на вопрос задачи?

*Дети.* Надо знать, сколько было марок в папином конверте и сколько было марок в мамином конверте.

*Учитель.* Послушайте продолжение задачи: «В папином конверте было 5 марок, а в мамином — 3. Сколько всего марок дали Ване?»

*Дети.* Ване дали 8 марок.

*Учитель.* Как вы решили?

*Дети.* К 5 маркам прибавили 3 марки — получили 8 марок.

*Учитель.* Решим новую задачу: «В папином конверте было 5 марок, а в мамином меньше, чем раньше, т. е. меньше, чем 3 марки. Сколько было марок в мамином конверте?»

*Дети.* В мамином конверте было не 3 марки, а 2 марки.

*Учитель.* Правильно. В первый раз в мамином конверте было 3 марки, а сейчас 2 марки. Сколько же сейчас будет всего марок у Вани?

*Дети.* У Вани будет 7 марок ($5+2=7$).

*Учитель* (изменяет задачу еще раз). Пусть в папином конверте было 5 марок, а в мамином было еще меньше — одна марка. Сколько же марок было в мамином конверте?

*Дети:* $5+1=6$.

*Учитель.* Папа подарил 5 марок и мама несколько. Всего у Вани — 5 марок. Сколько марок было в мамином конверте?

*Дети* (после обсуждения приходят к выводу, что в мамином конверте вообще не было марок). Ничего не было!

*Учитель.* Сколько же всего марок получил Ваня в последний раз?

*Дети.* Ваня получил 5 марок.

*Учитель.* Раньше мы складывали два числа: $5+1=6$ (марок). А последнюю задачу можно записать так: $5+0=5$ (марок).

Нуль — это значит «ничего», «нисколько»; когда говорят, было 0 марок, 0 копеек, это значит, совсем не было марок, совсем не было денег.

Далее учитель предлагает решить еще несколько задач, сводящихся к выражениям: $6+0=6$; $0+7=7$ и т. д.

Для закрепления понятия «нуль», выяснения его смысла полезны также деформированные примеры вида:

$$5+\square=5,\ \square+8=8.$$

Ученики без труда справляются и со следующим обобщением задачи.

*Учитель.* Ученик допустил в диктанте в понедельник несколько ошибок. (Рисует квадратик.) Во вторник он допустил вот столько ошибок. (Рисует второй квадратик.) Как узнать, сколько всего ошибок он сделал? Каким действием?

*Дети.* Сложить.

*Учитель.* А всего он сделал за 2 дня нуль ошибок:

$$\square+\square=0.$$

По скольку ошибок он делал каждый день?

Дети после обсуждения приходят к выводу, что ученик не сделал ошибок ни в первый, ни во второй день: $0+0=0$ (к нулю прибавить нуль — получится нуль).

Можно также показать посредством решения задач смысл вычитания нуля.

*Учитель.* На доске 3 кружочка. Я даю Пете 1 кружочек. Сколько у меня осталось? Запишите: $3-1=2$.

Снова составим задачу: «У меня 3 кружочка. Я даю Пете 2 кружочка. Сколько осталось?» Запишите: $3-2=1$.

Наконец составим последнюю задачу: «У меня было 3 кружочка. Я отдал Пете 3 кружочка. Сколько у меня осталось кружочков?» (Нисколько.) Запишем решенный пример: $3-3=0$.

Затем нужно сделать переход к структурно обратной задаче.

*Учитель.* У меня было 5 яблок (пишем число 5 на доске). Я отдал несколько яблок Пете. Как это записать? (Пишет на доске: $5-\square=\square$.) И осталось у меня 5 яблок!

Бывает ли так? Сколько же я отдал яблок, если их осталось столько же, сколько было?

Учащиеся приходят к выводу, что ничего не было отдано, т. е. отдано было нуль яблок: $5-0=5$.

Далее решается несколько задач, приводящих к выражениям, содержащим нуль: $7-7=0$, $6-0=\square$ и т. п. Роль нуля и в этом случае выявляется лучше всего при решении деформированных примеров:

$$8-\square=0, \qquad \square-0=4,$$
$$\square-9=0, \qquad \square+\square=0.$$
$$6-\square=6,$$

Впоследствии детям можно предложить сложные примеры, при решении которых либо в окончательном, либо в промежуточном результате появляется нуль:

$$10-10+5=\ , \qquad \square-5-5=0,$$
$$8+1-9=\ , \qquad 8+\square-9=0,$$
$$5+3-0=\ , \qquad 5+3-\square=0,$$
$$2+8-10=\ , \qquad 2+8-\square=0.$$

Важно приучать учащихся к пониманию обобщенных буквенных формул с нулем. Впоследствии, после изучения умножения и деления поучительно сопоставлять эти формулы с действиями второй ступени над единицей:

$$a+0=a$$

Если к числу $a$ прибавить число 0, то получится то же самое число $a$:

$$a+0=a,$$
$$a\cdot 1=a,$$
$$a:1=a.$$

$$x-x=0$$

Если из некоторого числа $x$ вычесть то же самое число, то получится число 0:

$$0-0=0,$$
$$a:a=1,$$
$$1:1=1.$$

## § 18. ИЗУЧЕНИЕ ТЕМЫ «ВТОРОЙ ДЕСЯТОК»

Изучение действий в пределах второго десятка имеет важное значение для дальнейшего изучения математики в начальной школе.

Как известно, письменное и устное сложение и вычитание многозначных чисел основываются в конечном счете на твердом знании таблицы сложения и вычитания в пределах 20. Кроме того, первичное ознакомление с понятием умножения (деления) целесообразно также осуществить в пределах двух десятков (это было подтверждено нашей многолетней практикой), т. е. до изучения всех случаев сложения и вычитания в пределах 100 (до решения примеров вида $67\pm9$, $67\pm29$).

Математика начальных классов опирается на четыре действия: сложение и вычитание, умножение и деление. Благодаря своевременному внедрению четырех действий мышление обогащается познанием и аддитивных свойств числа (разложимости целого числа на слагаемые), и мультипликативных его свойств (представления числа в виде произведения нескольких множителей).

Освоение даже небольшого числа случаев умножения и деления (скажем, $6\cdot3=18$) означает подъем мышления учащихся на качественно более высокий логический уровень, чем уровень мышления посредством суждений, связанных только с действиями первой ступени (пусть и с двузначными числами $67\pm29$).

Представляется естественным воспользоваться при изучении действий в пределах 20 теми навыками, которые были упрочены при обучении методом укрупнения в пределах первого десятка.

Противопоставление действий сложения и вычитания создает условия для одновременного изучения соответствующих пар задач, например на увеличение и уменьшение числа на несколько единиц.

Далее будет изложена методика одновременного (на одних и тех же уроках) изучения следующих трех разделов по теме «Сложение и вычитание в пределах второго десятка»:

1. Нумерация и простейшие случаи сложения и вычитания в пределах 20, когда в составе соответствующих примеров обязательно встречается число 10, например: 10+7, 17—7, 7+10, 17—10.

2. Сложение и вычитание без перехода через десяток (15+3, 3+15, 18—3, 18—15).

3. Сложение и вычитание с переходом через десяток (9+7, 16—9).

Рассмотрим прежде всего методику совместного изучения нумерации и сложения и вычитания в пределах 20.

При изучении нумерации чисел в пределах 20 целесообразно изобразить двузначное число в тетради в виде двух прямоугольников: слева — полный десяток, а справа — несколько единиц (рис. 38). Зрительное сопоставление фигур, сравнение высот прямоугольников облегчает усвоение впоследствии состава двузначных чисел: цифра слева показывает число десятков, цифра справа — число единиц. Детям надо разъяснить: нижние пять клеток целесообразно заштриховать, чтобы легче было считать.

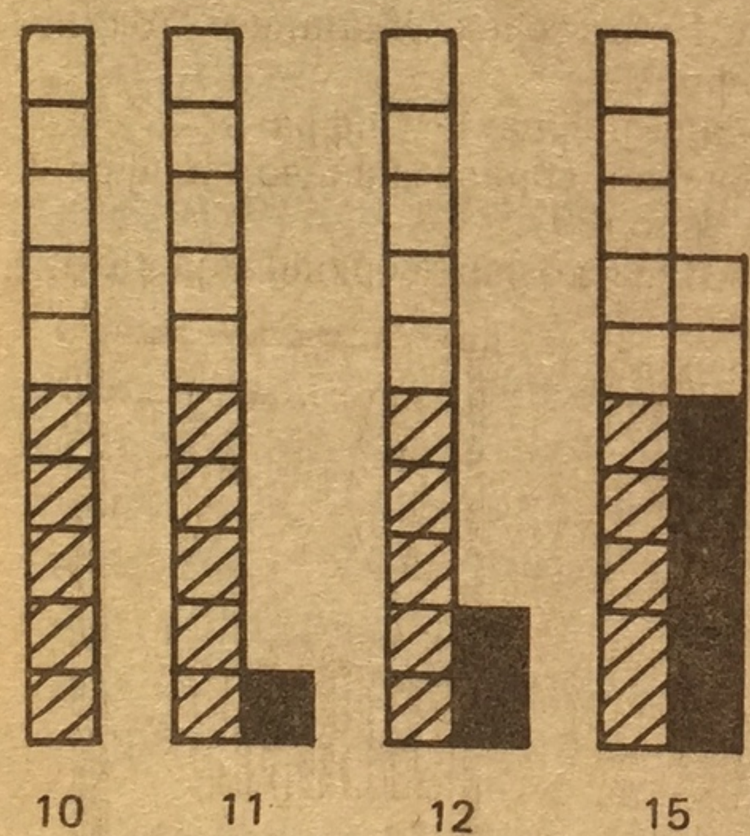


Рис. 38

Пользуясь при изучении этой темы русскими счетами, удобно запись чисел, называние их и откладывание на счетах рассматривать одновременно, намеренно создавая ситуацию для возникновения и закрепления двусторонних (прямых и обратных) ассоциаций вида «слово — символ», «символ — слово», «слово — движение» (перемещение костяшек счетов) и «движение — слово».

Кроме того, и упражнения по теме «Второй десяток» (как и по теме «Первый десяток») надо строить так, чтобы работа совершалась в символическом и конкретном планах одновременно, на одних и тех же уроках.

Объяснение материала ведется так: учитель вызывает двух учеников к доске и счетам. Остальные работают за партами с пучком палочек — десятком и отдельными палочками-единицами (или на счетах).

*Учитель.* Ты, Петя, будешь откладывать числа на счетах, а ты, Витя, будешь писать на доске.

*Десять.* Дети, как пишется это число? Отложите это число на счетах.

*Одиннадцать.* Напишите это число, отложите его на счетах.

Прибавляйте по одному и считайте подряд до 20. Вычитайте по одному и считайте назад до 10.

*Учитель.* Отложите 17. Из каких чисел состоит это число?

*Дети.* Число 17 состоит из 1 десятка и 7 единиц. (Учащиеся повторяют фразу и, соответственно, показывают 1 пучок и 7 отдельных палочек.)

*Учитель.* Какое число состоит из 1 десятка и 5 единиц? Отложите это число, напишите его. Назовите написанное число. Какое число состоит из 6 единиц и 1 десятка? Отложите это число на счетах и напишите его. (Учитель молча пишет на доске и число 18.) Отложите это число. Из каких чисел оно состоит? Назовите это число.

Обратим внимание на последовательность вопросов в данном рассуждении: название числа появляется в конце рассуждения: сначала обозреваем символы, знаки; потом произносим название числа (такое изменение порядка рассуждения содействует упрочению двусторонних связей в мышлении учащихся «символ⇄слово»).

Далее учитель молча откладывает на счетах 16 косточек. Учащиеся должны тоже молча написать соответствующее число цифрами.

*Учитель.* Где пишется десяток? Что изображает цифра 1? цифра 6?

*Дети.* Десяток пишется на втором месте, считая справа налево. Цифра 6 означает 6 единиц, цифра 1 означает 1 десяток (рис. 39).

Когда будет выработан навык откладывания десятков на верхней проволоке счетов, тогда легче будет перейти к формированию новых связей в старших разрядах цифр: десятки располагаются выше единиц (на второй проволоке снизу), сотни — выше десятков (на третьей проволоке) и т. д.

На втором уроке наряду с закреплением устной и письменной нумерации (и нумерации на счетах) изучаются одновременно сложение однозначных чисел с круглым десятком и соответствующие случаи вычитания.

*Учитель.* Какое число состоит из 1 десятка и 5 единиц? Запишите это число. Отложите его на счетах. Составьте это число из палочек. Как записать, что 15 состоит из 1 десятка и 5 единиц? (Дети записывают известным им способом состав числа: $10+5=15$.)

*Учитель.* Прочитайте эту запись слева направо и справа налево.

*Дети.* К 10 прибавить 5 — получится 15. Число 15 состоит из 5 единиц и 1 десятка.

*Учитель.* Как иначе можно составить число 15?

*Дети.* К 5 прибавить 10 — получится 15 ($5+10=15$).

*Учитель.* Прочитай, из каких чисел состоит число 15.

*Дети.* Число 15 состоит из 1 десятка и 5 единиц.

Благодаря применению метода противопоставления вычитание изучается одновременно со сложением.

*Учитель.* Прибавьте к 7 единицам 10 единиц, или 1 десяток. Сколько получится?

*Дети.* К 7 единицам прибавить 1 десяток — получится 17; $7+10=17$.

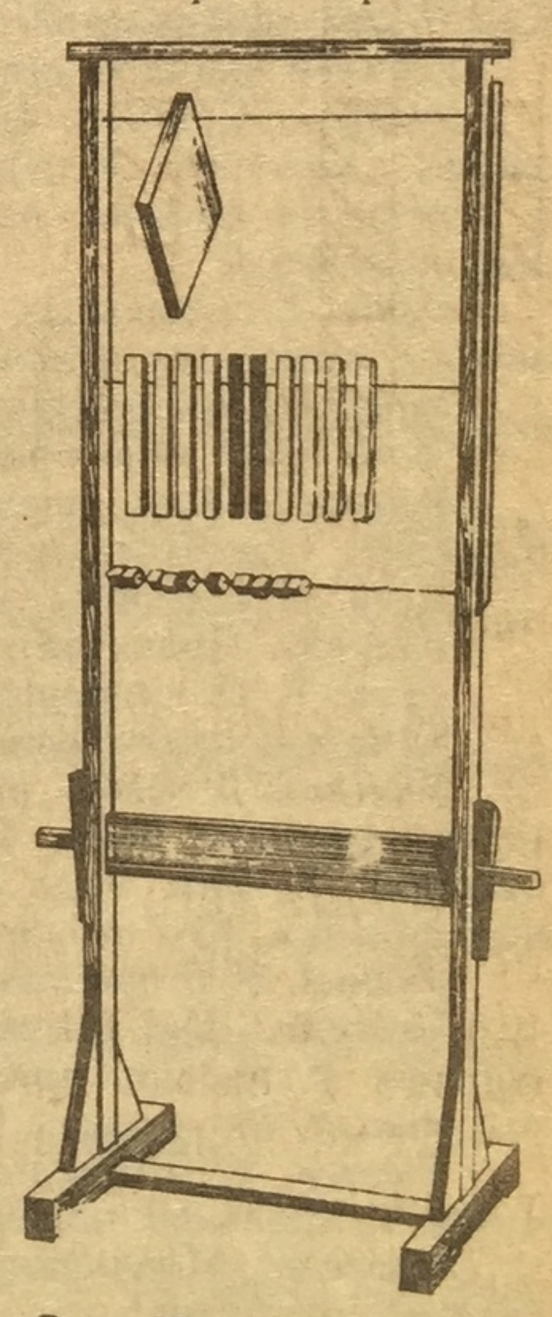


**Рис. 39**

*Учитель.* Составьте и решите обратный пример на вычитание. (Ученик пишет справа пример на вычитание десятка из семнадцати: 17—10=7. На доске и в тетрадях появляется запись двух примеров рядом: 7+10=17, 17—10=7.)

*Учитель.* Как можно иначе составить число 17?

*Дети.* К 10 прибавить 7 — получится 17. (На доске и в тетрадях появляется уже четыре примера, исчерпывающих все связи между тремя числами 17, 10, 7:

| | |
|---|---|
| 7+10=17, | 17—10=7, |
| 10+ 7=17, | 17— 7=10.) |

На первых порах решение примеров обязательно сопровождается работой на счетах.

На этом и на последующих уроках основным приемом закрепления становится решение (вперемежку с обычными примерами) деформированных и неопределенных примеров (с несколькими пропущенными числами) при различном видоизменении (усложнении) их структуры.

## § 19. СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ В ПРЕДЕЛАХ 20 БЕЗ ПЕРЕХОДА ЧЕРЕЗ ДЕСЯТОК

Изучение данной темы целесообразно построить также на основе противопоставления взаимно-обратных примеров на сложение и вычитание.

*Учитель* (ставит на полку слева 1 пучок, изображающий десяток, и справа 3 палочки). Сколько палочек отложено?

*Дети.* Отложен 1 десяток и 3 единицы. Всего отложено 13 палочек.

*Учитель* (откладывает отдельно от первой группы предметов 5 палочек и одновременно говорит). К 13 палочкам прибавить 5 палочек. Сколько получится? Как будем прибавлять?

Ученики вначале затрудняются ответить на этот вопрос.

*Учитель.* Сначала были 1 пучок и 3 *отдельные* (с акцентированием этого слова) палочки. Теперь надо к ним прибавить 5 отдельных палочек. 5 отдельных палочек надо прибавить к чему? К пучку или также к отдельным палочкам?

*Дети.* 5 отдельных палочек прибавим к 3 отдельным палочкам — получится 8 отдельных палочек.

*Учитель.* Мы получили 8 отдельных палочек. Что еще войдет в сумму?

*Дети.* Еще надо прибавить 1 пучок к 8 отдельным палочкам.

*Учитель.* Как иначе сказать? В 1 пучке — 1 десяток, 8 палочек — 8 единиц. 1 десяток да 8 единиц — сколько всего будет?

*Дети.* К 1 десятку прибавить 8 единиц — получится 18.

*Учитель.* Прочитайте решенный пример.

*Дети.* К 13 прибавить 5, получится 18.

(Учитель записывает на доске решенный пример: 13+5=18.

*Учитель.* А теперь решим другой пример. Мы к 13 прибавили 5. Пусть сначала было 5 отдельных палочек. (Переносит 5 палочек справа налево.) К ним надо прибавить 13 палочек, т. е. 1 пучок и 3 отдельные палочки. Кто скажет, сколько получится?

*Ученик.* К 5 прибавить 13 — получится 18.

*Учитель.* Ты сказал ответ сразу. Это правильно: сколько было всего палочек в первом примере, столько их будет и во втором примере. Там получилось 18, и здесь 18. Но как *решать* такие примеры? Расскажи подробно.

*Ученик.* К 5 отдельным палочкам прибавить 3 отдельные палочки — получится 8 отдельных палочек.

*Учитель.* Правильно. 8 отдельных палочек, да еще был целый пучок, сколько это будет?

*Ученик.* 8 единиц да 1 десяток — будет 18.

*Учитель.* А как сказать по-другому?

*Ученик.* К 5 прибавить 13 — получится 18.

На доске появляются две записи, одна под другой (общая сумма 18 записывается большими цифрами один раз после двух знаков равенства):

$$\begin{matrix} 15+3= \\ 3+15= \end{matrix} \; 18.$$

Решение других примеров сопровождается операциями на счетах.

Операции на счетах становятся основным средством конкретизации при изучении действий в пределах 20, так как вычисление на счетах кроме повышенной скорости выполнения операций обладает еще и наглядностью, помогающей уяснить существо десятичной нумерации.

Учитель пишет на доске пример: $4+12=16$.

Ученик откладывает на нижней проволоке счетов 4 косточки (единицы надо откладывать на нижней проволоке). К ним прибавляем 12 косточек. Так как 12 состоит из 1 десятка и 2 единиц, то надо прибавить сначала десяток на верхней проволоке и 2 единицы на нижней проволоке.

*Учитель.* Сколько всего получилось?

*Ученик.* К 4 прибавить 12 — получится 16.

Далее ставится задача: как составить новый пример на сложение из тех же чисел (4 и 12), чтобы получить опять 16? Учащиеся подсказывают, что следует к 12 прибавить 4. Пример решается устно и затем демонстрируется на счетах.

На доске и в тетрадях записываются один под другим два примера:

$$\begin{matrix} 5+11= \\ 11+5= \end{matrix} \; 16.$$

Затем следует запись:

$$4+12=12+4,$$
$$a+b=b+a.$$

В дальнейшем все больше упражнений выполняется без наглядных пособий, в уме.

Противопоставление вычитания сложению при вычислениях без перехода через десяток не представляет собой трудности для учащихся, так как вычитание совершается по той же схеме, которая использовалась нами и в предыдущих темах.

Решив пример $11+6=17$, учитель обращается к классу.

*Учитель.* Мы прибавили к числу 11 число 6. Теперь составьте пример на вычитание 6.

*Ученик.* Из 17 вычесть 6.

*Учитель.* Сколько же получится? (Пауза.)

*Учитель.* Из каких чисел состоит 17?

*Ученик.* 17 состоит из 1 десятка и 7 единиц.

*Учитель.* Нам надо вычесть 6 единиц. Как вычитать единицы: из десятка или из отдельных единиц?

*Ученик.* Из 7 единиц вычесть 6 единиц, получится 1 единица.

*Учитель.* Сколько же единиц осталось?

*Ученик.* Осталась 1 единица.

*Учитель.* Кроме того, остается нетронутый 1 десяток. Сколько же всего осталось?

*Ученик.* Всего осталось 11 (1 единица и 1 десяток — это и есть один-надцать — один-на-дцать).

Сравнение процессов решения примера $11+6=17$ и тут же за ним примера $17-6=11$ показывает, что оба процесса совершаются в теснейшей взаимосвязи. И там и тут использовано поразрядное разложение числа 17 на 1 десяток и 7 единиц; и там и тут использован принцип поразрядного вычитания: единицы прибавляются к единицам в первом случае и единицы вычитаются из единиц во втором случае. В решениях первого и второго примеров используются одни и те же числа (17, 6, 11, 10, 1, 7). Этот факт является главенствующим в практике укрупненного усвоения знаний (манипулирование с одними и теми же числами облегчает усвоение знаний, так как при этом функционирует наиболее экономно механизм оперативной памяти).

Интересно обратить внимание школьников на сходство следующих двух четверок примеров:

$$\begin{matrix}6+1=\\1+6=\end{matrix}\ 7;\ 7\begin{matrix}-1=6,\\-6=1.\end{matrix}\ \Bigg\|\ \begin{matrix}6+11=\\11+6=\end{matrix}\ 17;\ 17\begin{matrix}-11=6,\\-6=11.\end{matrix}$$

При решении любого примера следует обращать внимание на набор чисел, с которыми производятся операции разложения или соединения, и на логические операции, совершаемые над данными числами. Действительно, при одновременном изучении сложения и вычитания имеет место повторение одних и тех же логических операций при изменении состава чисел.

В самом деле, после решений первой пары примеров

$$14+2=16 \quad \text{и} \quad 16-2=14$$

следует решение обязательно второй пары примеров

$$15+2=17 \quad \text{и} \quad 17-2=15,$$

а за ней и третьей пары

$$16+2=18 \quad \text{и} \quad 18-2=16 \text{ и т. д.}$$

Можно отметить, что предлагаемый прием основан на трех операциях: 1) операции противопоставления вычитания сложению (переход от $14+2=16$ к $16-2=14$), 2) операции повторения сложения (переход от $14+2=16$ к $15+1=17$) и 3) операции повторения вычитания (переход от $16-2$ к $17-2$).

Таким образом, при укрупненном подходе к упражнениям совершается сложная мыслительная деятельность, включающая в себя: преобразование одного примера в другой; противопоставление двух действий; повторение действий одного названия (сложения или вычитания).

Остановимся теперь на значении паузы, возникшей после вопроса учителя в размышлениях школьника. Вспомним это место.

Был решен пример: $11+6=17$. Ученик составил новый при-

мер: 17—6. Ответ ему, вероятно, известен: 11. Но как его вычислить «по правилам»? Вот в чем вопрос! Ученик понимает: знать ответ — это одно, а провести точное объяснение решения — совсем другое. Следовательно, в этой паузе отражена характерная черта детского мышления, не раз отмеченная в психологической и методической литературе: его основательность, логичность. Мышление маленького человека сопротивляется возникновению случайных ассоциаций, непонятных (неубедительных) результатов!

Проводя обучение методом противопоставления операций, мы серьезно опасались возможного дидактически нецелесообразного раннего свертывания умозаключений, возникновения необоснованных суждений. Ожидали того, что учащиеся будут пытаться отделаться ответом такого рода: «Если к 11 прибавить 6 — получится 17; отсюда понятно, что, если от 17 отнять 6 — получится 11».

Вопреки нашим ожиданиям оказалось, что дети на первых порах второй пример воспринимают как совершенно новый, не имеющий отношения к предыдущему; они лишь знают способ преобразования формы первого примера ($11+6=17$) в новую форму ($17-11=\square$); они понимают, что есть возможность составления новой числовой комбинации, но еще не понимают содержательной связи между исходным и преобразованным примерами, не догадываются о неизбежности ответа второго примера и каждый раз его подробно вычисляют известным им приемом.

Ученик, составив обратный пример, решает его развернуто, т. е. обязательно заполняет пробел, лежащий между условием (17—6) и ответом (11); $17-6=\ldots=11$. Вопрос учителя: «Как это получить?» — ставит все на место, пробел заполняется: сначала разлагаем 17 на десяток и семерку ($17=10+7$), потом от единиц отнимаем единицы ($7-6=1$), затем получаем ответ ($10+1=11$).

Если выполнять это действие на счетах, достигается особенная наглядность выполнения вычислений.

Аналогично рассматриваются и другие случаи сложения и вычитания без перехода через десяток; исходный пример преобразуется перестановкой слагаемых в новый пример на сложение (который записывается под этим примером) и в новый пример на вычитание однозначного числа из двузначного (записывается справа):

$$11+5=16, \qquad 16-5=11,$$
$$5+11=16.$$

После решения этого примера составляется недостающий пример четверки, т. е. новый пример на вычитание второго (двузначного) слагаемого из суммы: $16-11=$.

*Учитель.* Как вычесть из 16 число 11? Из каких разрядных слагаемых состоит 16? Отложите на счетах! Из каких слагаемых состоит число 11?

*Дети.* 11 состоит из 1 десятка и 1 единицы.

*Учитель.* Будем вычитать по порядку: сначала вычтем десяток. Есть ли в числе 16 десятки? Сколько десятков? (В числе 16 есть 1 десяток.) Из одного десятка вычтем один десяток — десятков уже не осталось. Какое же число осталось? Мы закончили решение? Что еще надо вычесть? Десяток мы вычли. А теперь вычтем 1 единицу из 6 единиц. Сколько же осталось?

*Дети.* Из 16 вычесть 11 — получится 5.

Так завершается возникновение четверки примеров, охватывающих все возможные связи между тремя числами (5, 11, 16):

$$5+11= \quad 16 \quad 16 \quad -11=5,$$
$$11+5= \quad \quad \quad -5=11.$$

Особое внимание целесообразно уделять решению примеров, когда сумма двух чисел равна круглому числу 20 (и соответствующему случаю вычитания).

*Учитель.* К 16 прибавить 4 (16+4). Как вычислить?

*Ученик.* 16 состоит из 1 десятка (откладывает на верхней проволоке счетов 1 косточку) и 6 единиц (откладывает 6 косточек на нижней проволоке). 4 единицы прибавим к 6 единицам — получится 10 единиц, или десяток. Здесь 1 десяток, и там 1 десяток — всего будет 2 десятка, или 20. К 16 прибавить 4 — получится 20.

*Учитель.* На счетах отложены 2 десятка; надо вычесть из них 4 единицы (20—4=). У нас отдельных единиц нет. Надо 1 десяток раздробить в 10 отдельных единиц. 1 косточку сбрасываем с верхней проволоки, а на нижней откладываем 10 косточек.

*Ученик.* В 1 десятке 10 единиц. Из 10 вычтем 4 — получится 6. Да еще остался 1 десяток на верхней проволоке — будет всего 16. Из 20 вычесть 4 — получится 16.

При изучении действий в пределах 20 без перехода через десяток удобно пользоваться специально для этой цели сделанными *объемными счетами* (см. рис. 39).

Для изготовления этих счетов надо воспользоваться рамой от старых классных счетов; из арифметического ящика взять 10 кубиков (размер 2×2×2 см), которые изобразят единицы; 10 брусков (размер 20×2×2 см), которые изобразят десятки и 1 квадратную доску (размер 20×20×2 см), которая изобразит сотню. Эти детали просверливаются выше центра тяжести и надеваются на 4 проволоки. 2 средних кубика (2 бруска) закрашиваются в черный цвет, как на обычных счетах.

Такие счеты наглядны и удобны при изучении нумерации чисел в пределах 100, а также при выполнении сложения и вычитания.

Пусть требуется отложить на счетах число 16. Учащийся перемещает 1 брусок, изображающий десяток, и 6 отдельных кубиков, изображающих единицы.

Если требуется из 16 вычесть 13, то сначала вычитаем десяток — перемещаем брусок вправо, потом из 6 кубиков вычитаем 3 кубика — остается 3 кубика. Из 16 вычесть 13 — получится 3.

До пользования счетами надо показать учащимся, что 10 кубиков — единиц укладываются ровно на одном бруске (десятке), а 10 брусков как раз составляют одну доску (сотню).

После решения некоторого числа примеров с помощью пособий (в том числе и объемных счетов) необходимо поупражняться в устном решении примеров без наглядных пособий.

В системе упражнений по данной теме уместны укрупненные задания; под этим названием мы подразумеваем группу заданий, когда некоторые элемен-

ты предыдущего примера входят в последующие, благодаря этому решение группы примеров обретает непрерывный характер и все упражнения группы выступают в некотором единстве:

$$6+2=, \qquad 12+6,$$
$$10+6, \qquad 6+12.$$
$$16+2$$

При изучении действий в пределах 20 решаются вперемежку с примерами на новый материал также примеры в пределах первого десятка ($5+2=\square$; $7-3=\square$) и примеры с круглым десятком ($10+3$; $16-6$ и т. д.).

Раздельное изучение взаимно-обратных действий сложения и вычитания имело неизбежным следствием ослабление требований к сложности самостоятельных и контрольных работ. Домашняя и контрольная работы должны предлагаться на достаточно высоком уровне трудности, включая в себя наряду с прямыми примерами разнообразные деформированные упражнения.

Приведем один из вариантов контрольной работы, проведенной в экспериментальном классе школы № 82 (пос. Черноголовка Ногинского района Московской области) после изучения темы «Действия в пределах второго десятка».

*Контрольная работа*

| | |
|---|---|
| $18-12=$, | $\square-13=5$, |
| $7+11=$, | $12+\square=17$, |
| $20-\square=16$, | $20-\square=5$, |
| $13+7=$, | $20-6=$, |
| $10+9=$, | $8+\square=18$, |
| $\square-6=10$, | $17-7=$, |
| $\square\triangle\square=19$, | $16-5=$, |
| $\square\triangle\square=5$, | $\square+9=18$. |

Работа предлагалась на листочках, на которых были заранее написаны примеры.

Учащимся оставалось лишь вставлять найденные числа в каждый пример. Это сократило время выполнения работы и позволило предложить учащимся 18 примеров вместо обычной нормы (12). Все учащиеся справились с заданием за 20 мин.

## § 20. СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ В ПРЕДЕЛАХ 20 С ПЕРЕХОДОМ ЧЕРЕЗ ДЕСЯТОК

Эта тема считается наиболее трудной в курсе математики I класса, так как переход через десяток представляет собой качественный скачок в вычислительных навыках школьника. Если этот материал усвоен сознательно и прочно, то без труда осваивается и последующий раздел математики — сложение и вычитание с переходом через десяток в пределах 100 (иначе говоря, если ученик знает, почему $6+8=14$, то ему несложно вычислить далее: $14-8=6$; $36+8=44$; $44-38=6$; $26+38=64$ и $64-38=26$ и т. д.).

Перед изучением важно повторить те примеры, в которых одним из компонентов или результатом действия оказывается круглое число — десяток:

$3+7=$, $7+10=$,
$6+4=$, $10+4=$,
$10-3=$, $14-4=$,
$10-2=$, $15-10=$,
$10+10=$, $20-10=$.

Для подготовки к изучению темы полезно потренироваться в решении деформированных и неопределенных примеров:

$\square+\square=10$, $\square+10=17$,
$\square-2=10$, $\square+4=14$,
$10-\square=7$, $15-\square=10$,
$\square+\square=8$, $16-\square=6$,
$10+\square=20$, $20-\square=10$,
$\square+10=20$, $\square-10=10$.

Решение этих примеров сводится либо к разложению десятка на два слагаемых, либо к поразрядному разложению двузначного числа.

На тех же операциях, по существу, основывается решение примеров на сложение и вычитание с переходом через десяток. Изучая эту тему, также применяем противопоставление родственных упражнений.

Указанным методом дети пользовались при изучении двух предыдущих тем: «Сложение и вычитание в пределах 10» и «Сложение и вычитание в пределах 20 без перехода через десяток»; поэтому процесс преобразования примера на сложение в обратный пример на вычитание не является для них новым. Рассмотрим ход беседы учителя по объяснению данного материала.

*Учитель.* Сегодня мы будем решать новые, трудные задачи. Будьте внимательны. Посмотрите на доску. Там висит наборное полотно. Посчитайте, сколько карманов на нем.

*Дети.* В верхнем ряду 10 карманов, в нижнем ряду также 10 карманов. Всего 20 карманов.

*Учитель* (закрывает правую половину наборного полотна). Посчитайте, сколько теперь карманов осталось в верхнем ряду и в нижнем ряду.

*Дети.* В верхнем ряду 5 карманов, и в нижнем ряду 5 карманов. (То же самое делается и с правой половиной наборного полотна при закрытой левой.)

Учитель для большей наглядности вкладывает в кармашки полотна разноцветные палочки. Расставляют 9 красных палочек в верхнем ряду, а 4 зеленых — в нижнем. Сколько же палочек всего? Как решить эту задачу?

*Дети.* Надо к 9 красным палочкам прибавить 4 зеленых.

*Учитель.* Правильно! Но мы расставили палочки в двух рядах и ни один из них не полон, в обоих рядах остались пустые карманы. Перенесем палочки из одного ряда в другой так, чтобы заполнить один ряд. Как лучше переносить: красные палочки вниз к зеленым или зеленые палочки вверх к красным? Почему?

*Дети.* Перенесем 1 зеленую палочку к красным.

*Учитель.* Сколько палочек тогда окажется в верхнем ряду? Как вы считали?

*Дети.* К 9 палочкам прибавили 1 палочку — получилось 10 палочек.

*Учитель.* А сколько всего получилось? Сколько палочек осталось внизу?

*Дети.* Внизу осталось 3 палочки, вверху — 10. Десяток да 3 единицы,

будет 13. К десятку прибавить 3 — получится 13.

*Учитель.* Как мы решили задачу? Что мы сначала делали? Мы первое слагаемое дополнили до десятка. Сколько мы прибавили к 9, чтобы получить десяток?

*Дети.* Мы прибавили 1 палочку. К 9 прибавить 1 — получится 10.

*Учитель.* А дальше как считали?

*Дети.* Внизу осталось 3 палочки. 10 да 3 — будет 13.

*Учитель.* Скажите ответ.

*Дети.* К 9 прибавить 4 — получится 13.

*Учитель.* Решим теперь обратную задачу. Сколько всего палочек расставлено?

*Дети.* Расставлено 13 палочек.

*Учитель.* Из них 4 палочки зеленые. Их мы отдадим Вите. Сколько тогда останется палочек? Кто скажет условие задачи?

*Ученик.* Было 13 палочек, из них 4 палочки отдали Вите. Сколько палочек осталось?

*Учитель.* Как будем решать задачу? Нам надо отдать 4 палочки Вите. Будем отдавать ему по одной палочке. Сначала отдадим 3 палочки с нижнего ряда. Сколько теперь осталось на доске? Как это узнать?

*Дети.* На доске осталось 10 палочек. Из 13 вычесть 3 — получится 10.

*Учитель.* Мы закончили решение задачи? Нет! Нам надо отдать Вите всего 4 палочки. Мы же ему отдали только 3 палочки. Сколько палочек еще надо отдать ему?

*Дети.* Еще надо отдать 1 палочку. Из 10 вычесть 1 — получится 9.

*Учитель.* Теперь повторите еще раз задачу и скажите полностью ответ.

*Дети.* Из 13 палочек вычесть 4 палочки — получится 9 палочек. На доске записывается рядом два примера:

$$9+4=13, \qquad 13-4=9.$$

Как видно из изложенного, сначала сопоставляются два примера: на сложение и на вычитание (из суммы второго слагаемого). Затем решаются теми же рассуждениями другие пары примеров: $9+5=14$; $14-5=9$ и т. д.

При таком противопоставлении двух примеров постоянными для пары остаются числа, над которыми совершаются операции. Так, например, при решении пары примеров $9+4=13$ и $13-4=9$ логические операции совершаются над шестью числами: 9, 4, 13, 10, 3, 1. Если сопоставить последовательность операций при решении последней пары примеров, то схематически это выглядит так:

| | |
|---|---|
| $9+4=$ | $13-4=$ |
| $9+1=10,$ | $13-3=10$ |
| $(4-1=3)$ | $(4-3=1)$ |
| $10+3=13$ | $10-1=9$ |

Сравнивая отдельные логические операции, мы обнаружим, что при решении двух данных взаимно-обратных примеров совершается как бы замкнутый цикл операций, следующих одна из другой; тем самым решение двух примеров сливается как бы воедино.

Процесс решения начинается с числа 9 и кончается этим же числом. Сопоставляя попарно эти действия, мы обнаружим, что пары промежуточных действий ($9+1=10$ и $10-1=9$; $4-1=3$ и $4-3=1$; $10+3=13$ и $13-3=10$) также соответственно взаимно-обратны.

Отметим, что переместительный закон рассматривается во всех

предыдущих темах, например при изучении сложения и вычитания в пределах десятка $3+4=4+3$; в пределах 20 без перехода через десяток $13+4=4+13$.

Рассмотрим вопрос об изучении переместительного закона сложения по теме «Действия с переходом через десяток».

Пусть требуется доказать равенство $9+5=5+9$.

Сначала укладываем в верхнем ряду наборного полотна 5 красных палочек, а 9 зеленых — в нижнем ряду. Указываем, что необходимо дополнять до десятка только верхний ряд палочек. 5 зеленых палочек берем снизу и расставляем вверху. К 5 прибавить 5 — получится 10. Внизу осталось 4 палочки (из 9 вычесть 5— получится 4).

Всего получилось 1 десяток да 4 единицы — 14 палочек. К 5 прибавить 9 — получится 14. Записываем: $5+9=14$.

*Учитель.* Сколько палочек мы перенесли снизу вверх?

*Дети.* Мы перенесли 5 палочек.

*Учитель.* Можно ли было решить задачу проще? Можно ли решить задачу, перенеся только 1 палочку? Кто догадался?

*Дети.* Можно перенести 1 палочку сверху вниз.

*Учитель.* Но тогда внизу окажется десяток, а полный десяток должен находиться только в верхнем ряду. Как быть?

Далее выясняется, что мы могли бы сразу поменять местами слагаемые: вверху расставить не 5 красных, а 9 зеленых, а внизу, наоборот, вместо 9 зеленых расставить 5 красных палочек.

Теперь учащиеся видят, что при таком способе мы добиваемся двух целей: во-первых, более простого решения — снизу переносим наверх только одну палочку, и пример решается так:

$$\frac{9+5=}{\begin{array}{c}9+1=10\\(5-1=4)\\10+4=14\end{array}}$$

Во-вторых, соблюдения правила: в верхнем ряду располагается полный десяток.

Для большей наглядности при наличии двух касс можно оба способа решения сопоставить, поместив рядом. Сравнивая процессы решения, учащиеся видят выгоду второго способа. На доске и в тетрадях записываются решенные примеры друг под другом:

$$\begin{array}{l}5+9=\\9+5=\end{array}\ 14$$

От этой записи необходимо перейти к записи в одну строчку:

$$5+9=9+5.$$

На перестановку слагаемых решаются и другие примеры ($6+9=9+6$). Наконец переместительный закон записывается в виде буквенной формулы: $a+b=b+a$. «Сумма чисел $a$ и $b$ равна сумме чисел $b$ и $a$». Учащиеся повторяют правило: от перестановки слагаемых сумма не изменяется.

К моменту изучения темы «Второй десяток» учащиеся хорошо понимают сущность переместительного закона. Поэтому во всех случаях, когда второе слагаемое больше первого, вместо прибавления большего числа к меньшему дети прибавляют меньшее число к большему.

Таким образом, начиная со второго или с третьего урока решаются четверки примеров вида:

$$\begin{matrix} 9+5= \\ 5+9= \end{matrix} \; 14 \; ; \; 14 \; \begin{matrix} -5=9, \\ -9=5. \end{matrix}$$

Пусть дан пример: $6+9=$.

Если требуется решить обратный пример на вычитание, то целесообразно на первых порах решить его непосредственно (без перестановки слагаемых) $6+9=15$ ($6+4=10$; $9-4=5$; $10+5=15$). Затем справа записывается соответствующий пример на вычитание 9 из 15 ($6+9=15$; $15-9=6$).

При анализе решения примеров в пределах 20 выявляется снова роль прямых и обратных связей, которая оказывается различной в зависимости от характера упражнений.

Рассмотрим решение следующего примера:

$$\frac{7+9=}{\begin{matrix} 7+3=10 \\ (9-3=6) \\ 10+6=16 \end{matrix}}$$

В решении такого примера наиболее трудным оказывается второй этап ($9-3=6$). Чтобы разложить 9 на два слагаемых (3 и 6), необходимо совершить довольно сложные умозаключения:

1) осмыслить, что необходимо 7 дополнить до 10 (т. е. решить: $7+\square=10$);

2) выяснить, что для дополнения 7 до 10 не хватает 3;

3) осмыслить, что 3 должно быть «взято» (занято) из второго слагаемого (9); иначе говоря, 3 должно быть одним из двух слагаемых на которые разлагается число 9: $3+\square=9$;

4) найти, что второе слагаемое, дополняющее 3 до 9, есть 6;

5) прибавить 6 к 10.

Схематически процесс решения примера $7+9$, согласно предыдущему анализу, можно изобразить развернуто следующим образом:

$$\frac{7+9=}{\begin{matrix} 7+\square=10 \\ 7+3=10 \\ \square+3=9 \\ (6+3=9) \\ 10+6=16 \end{matrix}}$$

Мы видим, что в этой цепи суждений только на четвертом этапе ученик представляет, что 9 — это 3 да 6.

Аналогичные связи устанавливаются при решении примеров на вычитание:

$$\frac{13-9=}{\begin{matrix} 13-3=10 \\ (9-3=6) \\ 10-6=4 \end{matrix}}$$

На втором этапе опять используется связь: 9 — это 3 и 6.

В существующей методике при объяснении сложения и вычитания с переходом через десяток принято обычно фиксировать процесс решения кратко, в два этапа:

$$\frac{13-9=}{\begin{array}{l}13-3=10\\10-6=4\end{array}}$$

Между тем пропущенный второй этап (9 — 3 = 6) наиболее важен, и потому целесообразно записывать решение примера на первых порах в три строки, как было показано выше. Затем надо переходить к записи в две строки, а потом вообще к устному решению, без письменной фиксации промежуточных результатов, сразу записывая ответ.

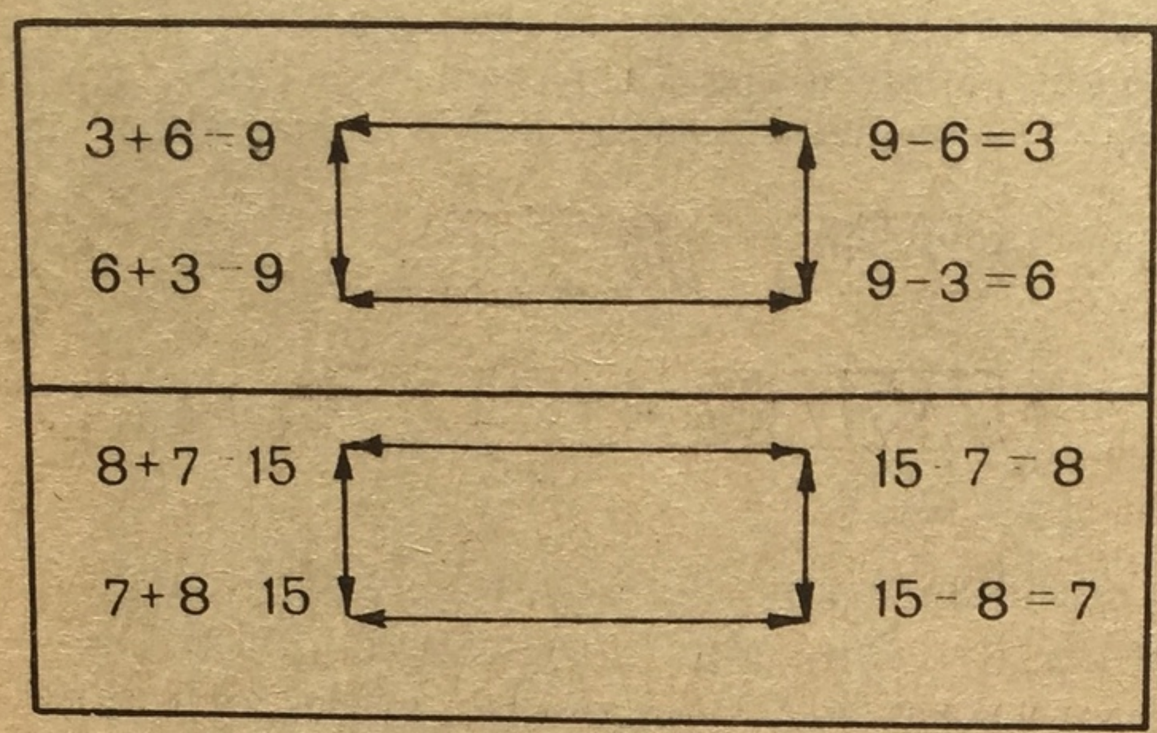



**Рис. 40**

Действия сложения и вычитания в пределах 20 входят в таблицу сложения и вычитания однозначных чисел и поэтому должны быть хорошо заучены. При этом надо обратить внимание не на раздельное изучение таблицы сложения и таблицы вычитания, а на заучивание четверок примеров (рис. 40).

В случае равных слагаемых четверка взаимосвязанных примеров вырождается в пару примеров: 6 + 6 = 12; 12 — 6 = 6.

Если в практике обучения подвергать перестройке во взаимнообратные не только примеры на сложение, но и примеры на вычитание, то ассоциации вида «6 да 9—15», «15 без 9—6» проявляются быстро и безошибочно.

Одновременное изучение сложения и вычитания (в дальнейшем умножения и деления) облегчает осуществление процессов контроля (проверки результатов).

Пусть, например, решающий получил неправильный результат: 13 — 7 = 5 (??). Процесс проверки, контроля, осуществляющийся автоматически при должной отработке нужных навыков, выполняется на основе преобразования решенного примера на вычитание в пример на сложение; так, ошибочность результата вычитания 13 — 7 = 5 обнаруживается на основе более прочной верной связи на сложение чисел: 7 + 5 = 12.

Уже при изучении действий первой ступени в пределах 20 возможно начать наблюдения над парами примеров, имеющих один и тот же результат.

*Учитель.* Решим пример: 3 + 5 =. Чему равна сумма этих слагаемых?

*Дети.* Сумма равна 8.

*Учитель.* Укажите первое и второе слагаемое. Увеличим первое слагаемое на 1, а второе уменьшим на столько же (т. е. тоже на 1). Составьте новый пример.

*Дети.* 3 + 1 = 4, 5 — 1 = 4, 4 + 4 = 8.

*Учитель.* Запишем эти примеры друг под другом. Как вы изменили слагаемые? Изменилась ли сумма? Когда сумма не изменяется?

Аналогичные наблюдения проводим над другой парой примеров, при особом изменении слагаемых:

$$\frac{6+9=}{\begin{array}{c}(6-2)+(9+2)=\\ 4\ +\ 11\ =\end{array}}\ 15$$

Первое слагаемое уменьшилось на 2 единицы, а второе увеличилось на 2 единицы, а сумма (15) осталась прежней.

Вместе с учащимися формулируется правило: «Если одно слагаемое $\frac{\text{увеличить}}{\text{уменьшить}}$ на несколько единиц, а другое слагаемое соответственно $\frac{\text{уменьшить}}{\text{увеличить}}$ на столько же единиц, то сумма не изменяется (рис. 41).

Надо отметить, что в этом правиле выражено сложное суждение, включающее изменение двух компонентов, причем имеется заключение о сохранении результата (суммы). Опыт показывает, что такие зависимости усваиваются детьми с бо́льшим интересом, чем даже логически более простые связи об изменении лишь одного компонента: «Если одно слагаемое увеличить на несколько единиц, а другое оставить без изменения, то сумма увеличится на столько же единиц».

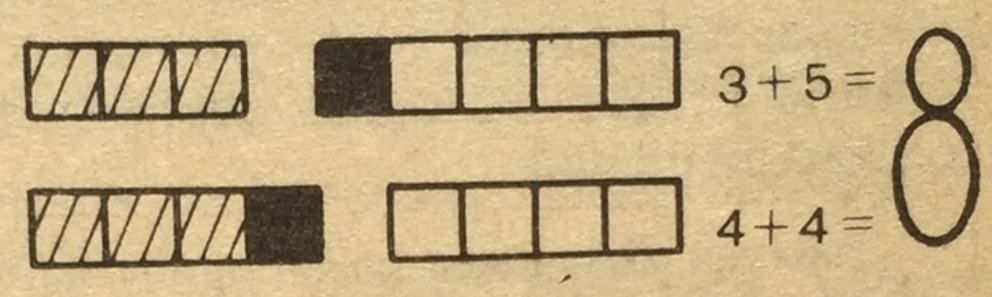



Рис. 41

$$\frac{6+9=15}{\begin{array}{c}(6-2)+9=(15-2)\\ 4+9=13\end{array}}$$

Первое слагаемое уменьшилось на 2 единицы, и сумма уменьшилась на 2 единицы

Для разъяснения зависимостей подобного рода имеют важное значение упражнения с многократным преобразованием исходного примера посредством замены одного или больше элементов равенства при постоянстве других элементов записи. Схематически такая работа выглядит так:

$2+5=7,$
$3+5=8,$
$3+6=9,$
$4+6=10.$

## § 21. РАБОТА С ТАБЛИЦЕЙ ПИФАГОРА

Заключительным разделом изучения действий в пределах 20 является ознакомление детей с таблицей Пифагора, работа над которой позволяет научить их общим навыкам работы над таблицей с двумя входами. Учителю целесообразно изготовить настенную таблицу Пифагора (для сложения и вычитания) и проводить по ней вычисления. Номера столбцов и строк лучше выделить двумя цветами.

По таблице решают задачи двух видов.

*Прямая задача:*

Даны два слагаемых: 7 и 5. Найти их сумму.

*Решение.*

Ведем указкой по 7-й строке и 5-му столбцу.
В пересечении линий находим сумму

*Обратная задача:*

Дана сумма двух слагаемых — 12. Найти слагаемые. Сколько разных решений имеет задача?

*Решение.*

Находим диагональ с числом 12, на этой диагонали 7 чисел.
Значит, существуют 7 разных реше-

7+5=12.

ний задачи:
3+9=4+8=5+7=6+6=
10+2=7+5=11+1= 12

Таблица сложения Пифагора весьма содержательна. При работе по ней вводим понятия «горизонтальность», «вертикальность», «диагональ».

Вместе с учащимися находим ответ на вопрос: сколько различных сумм образуется при сложении однозначных чисел? Ответ: 2, 3, 4 ... 18 (всего 17 различных сумм).

Итак, нахождение суммы двух данных чисел — задача определенная, имеющая одно решение, и нахождение слагаемых по данной сумме — задача неопределенная: эта задача имеет несколько решений.

Таблица Пифагора может стать источником занимательных упражнений. Так, по главной диагонали располагаются суммы равных слагаемых:

1+1=2
2+2=4
3+3=6 и т. д.

В клетках, симметричных относительно этой диагонали, располагаются равные суммы переставленных слагаемых, например: 7+4=4+7, 7+6=6+7 и т. д.

Если перегнуть таблицу Пифагора вдоль главной диагонали, то совпадают симметричные клетки, характеризующие переместительный закон сложения.

Сколькими способами можно разложить число 2 на два равных слагаемых? А число 18? Ответ в обоих случаях общий (полученный одним способом):

1+1=2, 9+9=18.

Сколькими способами можно разложить на два слагаемых числа диагонали 4 и 16?

Ответ в обоих случаях общий (тремя способами):

1+3=
2+2= 4 ;
3+1=

9+7=
8+8= 16. И т. д.
7+9=

*Конспект урока на тему «Сложение и вычитание в пределах 20» в I классе*

В начале урока проводится работа по таблице Пифагора. Прежде всего находятся по таблице суммы чисел: 5+8, 8+5, 9+6, 4+7 и т. д. Потом по таблице находится диагональный ряд, в котором записаны числа 12. Двигаясь от каждого такого числа в двух направлениях (вверх и влево), находим различные способы разложения числа на два слагаемых, например:

6+6= =6+6.
7+□= =□+7,
□+□= 12 =□+□,
4+8= =8+4.

Слева записываются симметричные суммы (на основе переместительного закона).

I. Решение примеров на доске и в тетрадях:

7+ 9 =, 16− 9 =,
6+ □ =13, □ −7=5,

$\square + 8 = 13$, $13 - \square = 9$,
$4 + 7 =$, $\square - 7 = 8$.

II. Устный счет.

На доске записывается ряд чисел: 19, 6, 4, 7, 15, 6, 20, 18. Учащиеся выполняют следующие задания: 1) прочитать числа ряда; 2) выписать из данного ряда однозначные числа (сколько таких чисел?); 3) выписать отдельно двузначные числа. Рассказать о составе этих чисел ($39 = 30 + 9 =$ 3 десятка + 9 единиц); 4) назвать самое меньшее двузначное число данного ряда; 5) назвать самое большее двузначное число данного ряда.

III. Математический диктант. (Учащиеся записывают в тетрадях лишь ответы на следующие задачи, которые медленно читает учительница.)

1. Найти сумму двух отрезков в 4 см и в 13 см.

2. К обеду приготовили 10 пирожков с мясом, а с капустой на 2 пирожка больше. Сколько пирожков приготовили с капустой? Сколько всего пирожков приготовили?

3. В букете 4 ромашки, а васильков на 2 меньше. Сколько васильков в букете? Сколько всего цветков в букете?

4. Коньки стоят 9 руб., они на 4 руб. дороже, чем санки. Сколько стоят санки?

5. Лыжный костюм стоит 18 руб., а шапка — 3 руб. На сколько костюм дороже шапки?

IV. Письменная самостоятельная работа в двух вариантах. (Текст записывается на доске, учащиеся записывают в своих тетрадях только ответы к заданиям.)

*1-й вариант:*

9+3
8+4
7+5
11—2
13—8
15—6

*2-й вариант:*

8+5
18+5
18+8
11—3
12—4
7—7

V. Решение взаимно-обратных задач. (В тетрадях записываются лишь решения задач.)

*Задача:*

На озере плавали 12 уток, 7 уток улетели. Сколько уток осталось?

*Первая обратная задача:*

На озере плавало несколько уток. Когда улетели 7 уток, на озере осталось 5 уток. Сколько уток плавало на озере первоначально?

*Решение.* 12—7=5.

*Вторая обратная задача:* «На озере плавали 12 уток. Когда улетело несколько уток, на озере осталось 5 уток. Сколько уток улетело?»

*Решение.* 12—5=7.

VI. Самостоятельное решение примеров (вставить пропущенные числа):

*1-й вариант*

$\square + 3 - 13 = 0$,
$10 + 7 - \square = 7$,
$14 - \square - 4 = 0$,
$19 - 10 + \square = 10$.

*2-й вариант*

$\square + 5 - 15 = 0$,
$10 + 8 - \square = 8$,
$16 - \square - 6 = 0$,
$17 - 10 + \square = 10$.

*Дидактический анализ урока.* Укрупнение дидактических единиц (УДЕ) осуществляется на уроках учителями, вообще говоря, по-разному.

Описанные в данной книге уроки — своеобразная фотография реальных уроков, действительно проведенных учителями-экспериментаторами в г. Элисте.

Данный урок отличается от других своей целевой направленностью: на этом уроке намеренно выделено больше времени для письменных самостоятельных работ учащихся. Опытному учителю удается устно решить с учащимися немало примеров, часть из которых представляет собой задание на преобразование задачи в обратную.

На данном уроке используются все основные приемы УДЕ: преобразование решенной задачи в обратную; деформированные задания; работа с таблицей сложения.

Заметим, что существенная особенность методической системы УДЕ — учет психологической тенденции к достижению мышлением целостности, завершенности знаний. В связи с этим важно подчеркнуть, что уже при изучении первого десятка в пропедевтическом плане — без обязательного заучивания правил, на базе конкретных опытов, демонстраций, наглядных манипуляций — усваиваются все основные понятия, характеризующие вообще действия первой ступени (и не только над числами).

Пусть в программах и учебниках не упоминаются во всех параграфах переместительный закон, таблица Пифагора, названия компонентов действий, разностное сравнение чисел и т. п. Тем не менее при *монографическом изучении* чисел первого десятка учитель вводит в речевое употребление весь арсенал понятий посредством комментирования, коллективного проговаривания (вслед за учителем) речевых оборотов и т. п.

## § 22. ОБ ИЗУЧЕНИИ ПОРЯДКОВЫХ ЧИСЕЛ В НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЕ

На занятиях, посвященных освоению понятия числа, уместно проводить упражнения, рассчитанные на различение понятий «количественное число» и «порядковое число».

Когда говорят «в коробке семь карандашей», то речь ведут о количественном числе, о том, сколько всего предметов. На вопрос, содержащий слово «сколько», отвечают количественным числом. Развитие понятия количественного числа привело затем к понятию «дробное число», которым измеряются величины, т. е. значения длины, площади, объема и т. п.

В жизни и речи уже первоклассника количественное и порядковое числа встречаются нередко рядом.

Когда говорят «вторая квартира», «пятый дом» и т. д., то употребляются порядковые числа. На вопрос, содержащий слово «который», отвечают порядковым числом.

На всех уроках (не только математики) надо пользоваться обоими видами числа: количественным и порядковым.

Порядковое число, как и прилагательное, следует употреблять вместе с существительными в разных родах: второй дом, третья игрушка, пятое окно и т. д.

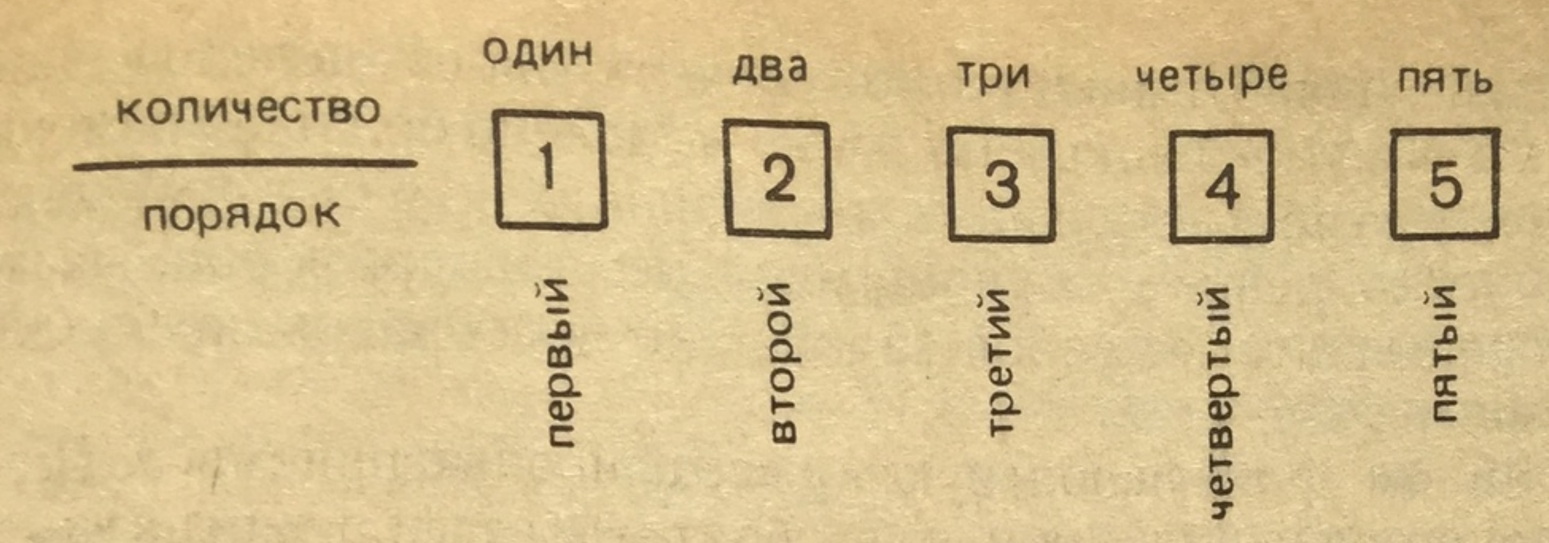



**Рис. 42**

Очень важно ознакомить детей как можно раньше с «парадоксом» порядкового числа (рис. 42). Порядковое число связано с освоением пространства, т. е. с понятиями «слева—справа», «дальше — ближе» и т. д. Парадокс порядкового числа выясняется в решении следующих трех задач.

*Задача № 1.* Сколько останется, если от четырех отнять три? (Ответ: 4—3=1).

*Задача № 2.* Сколько домов между четвертым и третьим домами на одной улице? (Ответ: нисколько).

Мы видим, что вторая задача отнюдь не решается одним вычитанием.

*Задача № 3.* Сколько домов между вторым и пятым домами?

Решая эту задачу, дети часто ограничиваются только вычитанием: 5—2=3 (дома). Правильный ответ заключается в том, что полученную разность надо еще уменьшить на 1.

На парадоксе порядкового числа основана следующая загадка-софизм: «Как привязать по одной к пяти колышкам... 6 лошадей?»

*Объяснение.* Сначала к большому пальцу (первый колышек) привяжу временно двух коней. Далее, привязываю к указательному третьего коня, к среднему — четвертого, к безымянному — пятого, а затем отвяжу с большого пальца шестого (??) коня и привяжу к мизинцу.

Где здесь допущена ошибка?

Для частой практики в употреблении порядковых чисел на уроках следует разучивать названия предметов, которые упорядочиваются в речи порядковыми числительными:

первый палец — большой,
второй палец — указательный,
. . . . . .
пятый палец — мизинец.

Или еще: понедельник — первый день недели, вторник — второй день недели и т. д. (Сколько дней между пятницей и вторником?)

Перечислить названия нот: до — ре — ми — фа — соль — ля — си.

Уметь перечислять названия месяцев и их номера следует научиться детям, конечно, в I классе.

## § 23. КЛАССИФИКАЦИЯ ПРОСТЫХ ЗАДАЧ (В ОДНО ДЕЙСТВИЕ) НА СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ

Все разнообразие простых задач на сложение и вычитание можно представить в виде трех циклов, по три задачи в каждом цикле.

Основу системы задач составляет первый цикл — задачи на нахождение суммы и неизвестного слагаемого; второй цикл — это задачи на нахождение разности, уменьшаемого и вычитаемого;

третий (основной) цикл — задачи на увеличение и уменьшение числа на несколько единиц и на разностное сравнение чисел[1].

В предыдущем изложении мы показали, что для первоклассников доступно и целесообразно решение деформированных примеров (упражнений) вида $2+\square=5$; $\square+1=6$ вперемежку с обычными примерами вида $2+3$; $5+1$.

Столь же естественным и выгодным оказывается совместное изучение соответствующих задач на нахождение суммы и неизвестного слагаемого (первый цикл задач); несколько позже одновременно (в одной теме) изучаются задачи на нахождение разности и уменьшаемого, а вслед за ними — на нахождение вычитаемого (второй цикл задач). В третьем цикле рассматриваются совместно задачи на увеличение и уменьшение числа на несколько единиц; на основе этих двух задач далее изучаются задачи на разностное сравнение величин (чисел).

Указанные три цикла задач (всего 9 видов) являются задачной основой изучения действий (операций) в первые годы обучения. В нашем учебнике математики каждая тройка задач выступает как некоторая укрупненная единица усвоения. В пробном учебнике в плане пропедевтики с самого начала отрабатываются соответствующие ключевые слова («увеличить на ...» — «уменьшить на ...», «больше — меньше»). Окончательное освоение всех разновидностей задач в одно действие осуществляется в теме «Второй десяток».

Рассмотрим далее методику одновременного изучения взаимосвязанных задач (основные положения этой методики применимы как в I, так и во II классе, т. е. независимо от того, в пределах каких чисел решаются эти задачи). В методике совместного изучения задач сначала всегда рассматривается какая-либо задача в роли так называемой прямой задачи, с тем чтобы, преобразовав ее в обратную, решить последнюю в сравнении (противопоставлении) с решением прямой задачи.

Приведем пример исходного цикла задач на нахождение суммы и неизвестного слагаемого.

[1] В последующем изложении мы увидим целесообразность аналогичной классификации простых задач и на действия второй ступени. Указанные традиционные названия типов задач постоянно упоминались в программах по математике для начальных классов. Тип задачи, снабженный общепринятым названием, это уже понятие, облегчающее планирование работы и проведение урока, подбор упражнений. К сожалению, в типовых программах по математике МП СССР для начальной школы (1984) и дублирующих их МП РСФСР для четырехлетней школы (1985) исчезло не только упоминание об основных приемах эффективного обучения (противопоставление, обратная задача, составление задач), но и традиционные названия задач: разностное (кратное) сравнение, задачи на нахождение суммы и неизвестного слагаемого и т. п.

Для программы по математике начальных классов, где немного понятий, имеют исключительно важное значение понятийное обогащение и указанные конкретные названия, обслуживавшие учителей начальных классов добрую сотню лет. Они должны занять свое место в программах, как это было и раньше.

*Прямая задача:* «Отец дал Мише 12 яблок, а мать добавила еще 5 яблок. Сколько всего яблок дали Мише?»

*Решение.* 12+5=17 (ябл.).

Составление и решение обратной задачи осуществляется устно.

*Учитель.* Какие числа были даны в задаче?

*Дети.* В задаче были даны числа 12 яблок, 5 яблок.

*Учитель.* Какое же число мы нашли после решения задачи?

*Дети.* Мы нашли число 17 яблок.

*Учитель.* Запишем эти три числа рядом: 12, 5, 17.

*Решение.* 12+5=17 (яблок).

Составим теперь новую задачу, для чего неизвестным сделаем одно из двух других чисел, например 12 яблок (□; 5 яблок; 17 яблок). Порядок расположения чисел в схемах сохраняем прежний.

Учитель показывает поочередно на числа, а учащийся формулирует условие обратной задачи, ориентируясь на имеющиеся числа: «Отец дал Мише несколько яблок, мать — 5 яблок. Всего у Миши оказалось 17 яблок. Сколько яблок дал Мише отец?» (Если в схеме имеется квадратик, то соответственно говорим: «несколько».)

На доске появляются рядом схемы двух задач с их решениями.

| *Прямая задача:* | *Обратная задача:* |
|---|---|
| 12 ябл., 5 ябл., □ ябл. | □ ябл., 5 ябл., 17 ябл. |
| *Решение.* 12+5=17 (ябл.). | *Решение.* 17—5=12 (ябл.). |

Затем процессы решения данных задач сравниваются: обе задачи в одно действие; если прямая задача решена действием сложения, то обратная решена действием вычитания. Введение обратной задачи не изолировано от введенной ранее прямой, а есть как бы ее продолжение. Обратная задача с тем же сюжетом и набором чисел имеет свои положительные отличительные стороны:

1) учащиеся не только знакомятся с новой задачей, но и повторяют уже изученное — ту задачу, преобразованием которой получена данная задача;

2) учащиеся усваивают связи между задачами; умозаключения здесь осваиваются в цикле, во взаимопереходах друг в друга.

Во второй паре заданий следует вначале предложить задачу на нахождение неизвестного слагаемого, а затем преобразовать ее в задачу на нахождение суммы.

Решим вначале следующую задачу: «У Сергея было несколько тетрадей в клетку и 13 тетрадей в линейку. Всего у него было 19 тетрадей. Сколько было тетрадей в клетку?»

Читаем условие задачи: «У Сергея было несколько тетрадей в клетку». Сколько было этих тетрадей — неизвестно. Нарисуем вместо неизвестного числа клетку. Читаем дальше: «... и 13 тетрадей в линейку» (пишем рядом с клеткой число 13). «Всего же у него было 19 тетрадей». Рядом написаны числа: □, 13, 19.

*Учитель.* Когда же и при каком действии получится 19?

Кто расставит знаки? (На доске появляется равенство: □+13=19.)

*Учитель.* Как решать эту задачу?

*Дети.* К 6 прибавить 13 — получится ... 19 (?!).

Так чаще всего отвечают первоклассники. Это ответ показывает, что процесс решения задачи вначале обязательно проходит через этап проявления прямой связи. Восприятием смыслового оборота («было несколько тетрадей в клетку и 13 в линейку») завершается мысль о сложении: □+13=19. (Иначе говоря, грамматический союз «и» наводит на мысль о сложении; возникает ассоциация «и» — «плюс».) Дальнейшее решение сводится к подбору неизвестного слагаемого, а затем к вычислению уже найденного подбором числа. Однако вопрос заключается в том, чтобы решить задачу вычитанием.

*Учитель.* Сколько же было всего тетрадей у Сергея?

*Дети.* У Сергея было 19 тетрадей.

*Учитель.* Сколько из них было в линейку?

*Дети.* В линейку было 13 тетрадей.

*Учитель.* Какие же были остальные тетради?

*Дети.* Остальные тетради — в клетку.

*Учитель.* Всего было 19, из них в линейку 13. Сколько же остается тетрадей? Как это найти?

*Дети.* От 19 отнять 13 — получится 6.

На доске и в тетрадях появляется запись (слева):

□, 13, 19.

*Решение.* 19—13=6 (тетрадей в клетку).

Решенная задача на вычитание преобразуется в обратную задачу на сложение.

*Учитель.* Напишем схему решенной задачи: 13, 19, 6. В этой задаче мы нашли число 6. А теперь составим задачу, чтобы ответом к задаче было число 19. (Учитель записывает схему новой обратной задачи: 13, □, 6.)

В данной системе удобно всякую исходную задачу называть прямой задачей, а полученную из нее преобразованием — обратной.

*Учитель.* Расскажите про числа, записанные в этой схеме (указывает на числа слева направо).

*Дети.* У Сергея было 13 тетрадей в линейку и 6 тетрадей в клетку. Сколько всего тетрадей у Сергея?

*Учитель.* Как же мы найдем, сколько всего тетрадей у Сергея?

*Дети.* К 13 прибавить 6 — получится 19.

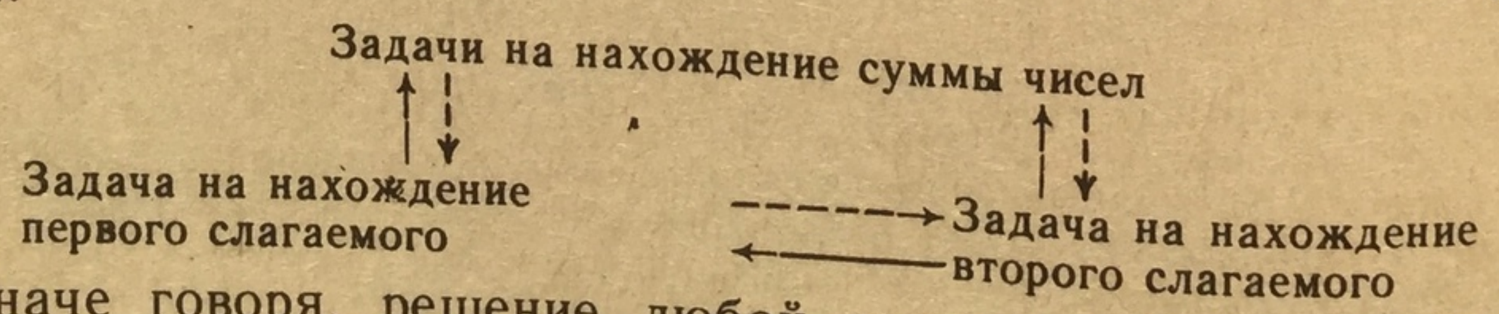
На доске и в тетрадях записываются рядом две решенные задачи:

| | |
|---|---|
| Схема: □, 13, 19. | Схема: 13, □, 6. |
| *Решение.* 19—13=6 (т.). | *Решение.* 13+6=19 (т.). |

Таким образом, мы рассмотрели преобразование задач, связав их с темой «Сложение и вычитание в пределах 20». Указанная методика совместного изучения прямых и обратных задач применяется с самого начала обучения математике, когда изучаются числа в пределах первого десятка.

Если вначале методом изучения задач было решение пар задач с общим сюжетом и общими числами (15—12=3; 12+3=15), то в ходе изучения темы предлагаются, конечно, и изолированные (одиночные) задачи. Однако в этом случае характер умозаключений меняется: хотя явно мы ограничиваемся как будто решением лишь одной задачи (допустим, 4+3=7), но оно неявным образом равносильно решению всего цикла из трех задач (7—3=4, 7—4=3). Таков эффект метода раннего укрупнения знаний.

В результате применения описанного метода укрупненного освоения знаний возникает замкнутая связь операций по решению первой тройки задач. Любая задача данного цикла приобретает особое качество: она выступает как *представитель* всей тройки задач:




Иначе говоря, решение любой задачи тройки равносильно решению любой другой задачи из этой же тройки, т. е. реше-

ние одной задачи заменяет решение всего цикла задач. Говоря образно, при системе укрупнения одновременно с решением какой-либо задачи тройки мозг в подсознательной сфере, по существу, обрабатывает и две другие задачи-следствия, обратные первой.

Так происходит обобщение приемов рассуждения, слияние взаимосвязанных видов задач в группу родственных задач как крупную единицу усвоения. Это и приводит в конечном счете к *ускоренному усвоению* математики.

## § 24. ЗАДАЧИ НА НАХОЖДЕНИЕ РАЗНОСТИ, УМЕНЬШАЕМОГО И ВЫЧИТАЕМОГО. ОДНОВРЕМЕННОЕ ИЗУЧЕНИЕ ЗАДАЧ НА НАХОЖДЕНИЕ РАЗНОСТИ И УМЕНЬШАЕМОГО

Пусть учащимся предложена следующая прямая задача (на нахождение разности): «У Нины было 17 коп. Она купила конфет на 7 коп. Сколько денег у нее осталось?» *Решение*. $17-7=10$ (коп.). Далее учитель ведет следующую беседу.

*Учитель*. Какие числа были даны в задаче?

*Дети*. В задаче были даны числа 17 коп., 7 коп., 10 коп.

*Учитель*. Разве число 10 коп. тоже было известно? Мы нашли число 10 коп. после решения задачи. Значит, число 10 коп. не было дано в условии задачи. Это число подчеркнем чертой. Записываем схему прямой задачи:

17 коп., 7 коп., **10 коп.**

*Учитель*. А теперь составим обратную задачу. Для этого сделаем неизвестным первое число схемы, т. е. число 17 коп., а два других числа будут известны: □; 7 коп.; 10 коп. Искомое (неизвестное) число обозначим квадратиком.

Учащиеся по этой записи формулируют условие обратной задачи: «У Нины было несколько копеек. Она купила конфет на 7 коп., после этого у нее осталось 10 коп. Сколько было денег у Нины до покупки?»

*Учитель*. Сколько копеек было у Нины?

*Дети*. Мы этого не знаем. У нее было несколько копеек. Поэтому напишем вместо неизвестного числа квадратик.

*Учитель*. Сколько денег она истратила?

*Дети*. Нина истратила 7 коп.

*Учитель*. Сколько денег у нее осталось?

*Дети*. У Нины осталось 10 коп.

*Учитель*. Какой же будет вопрос задачи?

*Дети*. Сколько денег было первоначально у Нины?

На доске написаны рядом три числа:

□; 7 коп; 10 коп.

*Учитель*. У Нины осталось 10 коп. Да еще она истратила 7 коп. Сколько же денег у нее было вначале? Больше или меньше, чем 10 коп.? Почему было больше? На сколько больше? Как узнать, сколько денег было вначале?

*Дети*. К 10 коп. прибавить 7 коп. — получится 17 коп. У Нины было 17 коп.

На доске и в тетрадях записываются рядом решения двух задач.

*Прямая задача:*
17 коп., 7 коп., □.
*Решение*. $17-7=10$ (коп.).

*Обратная задача:*
□, 7 коп., 10 коп.
*Решение*. $10+7=17$ (коп.).

Затем решения данных задач сравниваются: если прямая задача решена действием вычитания, то обратная задача — действием сложения.

Следующую пару задач удобно предложить в обратной последовательности: сначала — задачу на нахождение неизвестного уменьшаемого, а потом предложить детям преобразовать решенную задачу (в задачу на определение разности).

«Из мешка отсыпали 12 кг муки. После этого в мешке осталось 3 кг муки. Сколько килограммов муки было в мешке первоначально?»

*Решение.* 3+12=15 (кг).

После решения задача на нахождение уменьшаемого преобразуется тут же в задачу на нахождение разности: «В мешке было 15 кг муки. Из нее взяли 12 кг муки. Сколько килограммов муки осталось?»

В тетрадях появляется параллельная запись двух задач:

*Прямая задача:*

Схема: 12, 3, □.

*Решение.* 3+12=15 (кг).

Ответ: В мешке было 15 кг муки.

*Обратная задача:*

Схема: 12, □, 15.

*Решение.* 15—12=3 (кг).

Ответ: Из мешка отсыпали 3 кг муки.

*Задачи на нахождение вычитаемого.* Вслед за задачами на нахождение разности и уменьшаемого необходимо изучить последнюю задачу из данной тройки — задачу на нахождение неизвестного вычитаемого.

Задачу на нахождение вычитаемого надо вводить через решение прямой задачи (на нахождение разности). Пусть решается задача: «К обеду в столовой было подано 16 кг хлеба. За обедом съели 11 кг хлеба. Сколько хлеба осталось после обеда?»

*Решение.* 16—11=5 (кг).

Записываем схему решенной задачи: 16, 11, 5. Предлагаем учащимся составить обратную задачу по схеме:

16 кг, □, 5 кг.

(Это и есть задача на нахождение вычитаемого.)

Первоклассники формулируют условие этой задачи: «К обеду в лагере было подано 16 кг хлеба. После обеда осталось 5 кг хлеба. Сколько хлеба съели за обедом?»

*Учитель.* Сколько было подано хлеба к обеду?

*Дети.* К обеду было подано 16 кг хлеба.

*Учитель* (записывает: 16 кг). Сколько же килограммов съели за обедом?

*Дети.* Мы не знаем, сколько съели за обедом.

Учитель рядом с числом 16 кг пишет квадратик, изображающий отсутствующее число:

16 кг, □, 5 кг.

*Учитель.* Если было 16 кг, а съели столько-то (указывает на квадратик), то сколько же осталось хлеба?

*Дети.* Осталось после обеда 5 кг.

*Учитель.* Как же связать эти три числа?

*Дети.* К обеду было подано 16 кг хлеба.

*Учитель.* А съели за обедом хлеба больше, чем 16 кг, или меньше?

*Дети.* Съели хлеба, конечно, меньше, чем 16 кг.

*Учитель.* Сколько же хлеба осталось после обеда? Что же сделали с остальным хлебом? Кто скажет. Из каких слагаемых состоит число 16?

*Ученик.* Из 5 кг и еще какого-то числа.

*Учитель.* Как ты раньше нашел число 16 кг?

*Ученик.* К 11 прибавил 5 — получил 16.

*Учитель.* А еще как можно найти число 11? Как можно найти это число действием вычитания?

*Дети.* Из 16 вычесть 5 — получится 11.

Окончательно на доске и в тетрадях оформляется параллельная запись решения обеих задач:

*Прямая задача:*

16 кг, 11 кг, □.

*Решение.* 16—11=5 (кг).

*Обратная задача:*

16 кг, □, 5 кг.

*Решение.* 16—5=11 (кг).

Вторая пара задач решается в другой последовательности: сначала —

задача на нахождение неизвестного вычитаемого, а потом — на нахождение разности.

Рассмотрим задачу: «На реке плавали 10 гусей. Когда улетело несколько гусей, на реке осталось 3 гуся. Сколько гусей улетело?»

*Решение.* 10 — 3 = 7 (г.).

Записываем схему решенной задачи: 10 г., □, 3 г. Составляем схему обратной задачи на нахождение остатка:

10 г., 7 г., □.

Учащиеся формулируют ее условие: «На реке плавали 10 гусей. Из них улетели 7 гусей. Сколько гусей осталось на реке?»

*Решение.* 10 — 7 = 3 (г.).

В конце изучения данной темы необходимо иногда решать изолированные задачи без составления к ним обратных задач, а иногда решать даже все 3 взаимосвязанные задачи. Например, к последней паре задач можно составить третью задачу на нахождение неизвестного уменьшаемого.

Схема задачи: □, 7 г., 3 г.

Условие задачи: «На реке плавало несколько гусей. Когда с реки улетели 7 гусей, на реке осталось 3 гуся. Сколько гусей плавало на реке первоначально?»

*Решение.* 3 + 7 = 10 (г.).

Так создается замкнутая система связей, соединяющих три задачи данного цикла:

Задачи на нахождение разности

↑↓ ↑↓

Задача на нахождение уменьшаемого ⟷ Задача на нахождение вычитаемого

## § 25. ПРОТИВОПОСТАВЛЕНИЕ ЗАДАЧ НА НАХОЖДЕНИЕ СУММЫ И РАЗНОСТИ

При одновременном изучении взаимно-обратных действий возникает возможность и необходимость противопоставления соответствующих этим действиям задач.

*Учитель.* На озере плавали 9 уток. Потом к ним прилетели 4 утки. Какой вопрос можно поставить к задаче?

*Дети.* Сколько всего уток плавает на озере?

*Учитель.* Как решить задачу?

*Дети.* К 9 уткам прибавить 4 утки — получится 13 уток.

*Учитель.* Составим теперь новую задачу. Вспомните ответ на вопрос прямой задачи. Сколько всего уток плавает на озере?

*Дети.* На озере плавают 13 уток.

*Учитель.* В первой задаче мы говорим, что 4 утки прилетели. А как мы скажем про этих уток во второй задаче?

*Дети.* 4 утки улетели.

*Учитель.* Кто составит вторую задачу?

(Учитель разрешает составлять новую задачу и с иными числами.)

Вместе с учащимися составляется новая задача: «На озере плавали 12 уток. 5 уток улетели. Сколько уток осталось на озере?» *Решение.* Из 12 уток вычесть 5 уток — получится 7 уток. Ответ: на озере осталось 7 уток.

Отметим, что рассмотренные задачи не являются, строго говоря, взаимно-

обратными, так как в них числа различные. Однако родство этих задач обеспечено глаголами противоположного смысла: прилетели (сложение), улетели (вычитание).

При таком видоизменении задачи учащиеся учатся пользоваться парами слов-антонимов, обозначающих действия противоположного смысла:

нашли — потеряли (... грибы),
налили — вылили (... ведер воды),
заработали — истратили (... рублей),
убежали — прибежали (... кролики),
улетели — прилетели (... птицы) и т. д.

Составление новой задачи учащийся выполняет самостоятельно, при этом он совершает важные логические операции по замене понятий им противоположными, по замене роли чисел, по изменению вопроса к задаче.

Впоследствии может быть дана первой и задача на вычитание, к которой учащийся составляет соответствующую задачу на сложение: «В бочке было 15 ведер воды. Из нее вылили 6 ведер воды. Сколько воды осталось в бочке?» *Решение.* 15—6=9 (в.). Далее первоклассник с помощью учителя составляет и решает задачу на сложение (с использованием тех же чисел, но с новым содержанием — на увеличение содержимого в сосуде).

## § 26. О СИСТЕМЕ ПРОСТЫХ ЗАДАЧ, РАССМАТРИВАЕМЫХ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТАБЛИЧНОГО УМНОЖЕНИЯ И ДЕЛЕНИЯ

В наших учебниках первоначальное изучение умножения и деления осуществляется в следующей последовательности трех циклов задач (по три задачи в каждом цикле):

I цикл: а,б) умножение при постоянном множимом и деление по содержанию (совместно); в) деление на равные части.

II цикл: а,б) уменьшение и увеличение числа в несколько раз (совместно); в) кратное сравнение[1].

III цикл: а,б) нахождение одной части числа и числа по величине одной его части (совместно); в) решение задачи: «Какую часть составляет одно число от другого?»

Методическая система изучения этих задач аналогична той, которая описана нами для простых задач первой ступени (на сложение и вычитание).

Последовательность задач по теме «Умножение и деление» удобно представить в следующей схеме (читать снизу вверх):

[1] Поистине удивительно, как решился автор типовых программ для начальной школы (1984) А. М. Пышкало попросту упустить в них следующие традиционные названия задач: «деление по содержанию», «деление на равные части», «кратное сравнение» и т. п. Отказавшись от названий задач (от общепринятых терминов-понятий), мы попросту лишаемся ориентировки в задачном материале.

| Задачи на умножение | Задачи на деление | |
|---|---|---|
| III б) нахождение числа по части | в) какую часть составляет одно число от другого? | а) нахождение части числа (*прямая задача*) |
| II а) увеличение числа в несколько раз (*прямая задача*) | в) кратное сравнение | б) уменьшение числа в несколько раз |
| I а) умножение (повторение равных слагаемых), *прямая задача* | б) деление по содержанию | в) деление на равные части |

В этой системе наиболее простыми исходными задачами (условно названными нами прямыми, они помечены буквой «а» являются задачи на повторение равных слагаемых (I цикл), на увеличение числа в несколько раз (II), на нахождение части числа (III).

Задачи «а» и «б» каждого цикла рассматриваются совместно на одном уроке; задача «в» вводится чуть позже, в постоянном противопоставлении с задачами «а» и «б».

*Одновременное изучение умножения и деления по содержанию.* На двух-трех уроках (не больше!), посвященных умножению, выясняется смысл понятия умножения как свернутого сложения равных слагаемых (о действии деления на этих уроках пока не говорится). Этого времени достаточно для изучения таблицы умножения числа 2 на однозначные числа.

Обычно учащимся показывается запись по замене сложения умножением: $2+2+2+2=8$; $2\cdot4=8$. Здесь связь между сложением и умножением идет в направлении «сложение→умножение». Уместно тут же предложить учащимся упражнение, рассчитанное на появление обратной связи вида «умножение→сложение» (равных слагаемых): рассматривая эту запись, учащийся должен понять, что требуется число 2 повторять слагаемым столько раз, сколько показывает множитель в примере ($2\cdot4=8$).

Сочетание обоих видов упражнений есть одно из важных условий, обеспечивающих сознательное усвоение понятия «умножение», означающего свернутое сложение.

На третьем уроке (или четвертом, а зависимости от класса) к каждому из известных случаев умножения приводится соответствующий случай деления. В дальнейшем умножение и деление по содержанию выгодно рассматривать только совместно на одних и тех же уроках.

При введении понятия деления необходимо вспомнить соответствующие случаи умножения, чтобы, оттолкнувшись от них, создать понятие о новом действии, обратном умножению.

Стало быть, понятие «умножение» приобретает богатое содержание: оно не только результат сложения равных слагаемых («обобщение сложения»), но и основа, исходный момент деления, которое, в свою очередь, представляет «свернутое вычитание», заменяющее последовательное «вычитание по 2»:

| | |
|---|---|
| по $2 \cdot 3 = 6$ | 6: по $2 = 3$ |
| $2+2+2=6$ | $6-2-2-2=0$ |
| Сложим 3 раза по 2. | Вычтем 3 раза по 2. |

Смысл умножения постигается не столько при самом умножении, сколько при постоянных переходах между умножением и делением, так как деление есть завуалированное, «измененное» умножение. Это и объясняет, почему выгодно впоследствии изучать всегда одновременно умножение и деление (как табличное, так и внетабличное; как устное, так и письменное).

Рассмотрим примеры.

По $2 \cdot 3$ (по 2 взять 3 раза) — получится 6;
6:по 2 (6 разложить по 2) — получится 3.

Вначале несколько учеников берут со стола по 2 кружочка и отходят в сторону (5—6 человек). Учитель объявляет, что эти ученики будут принимать участие в составлении задач (решает же задачи весь класс).

Когда решается прямая задача на умножение, ребята подходят к наборному полотну и отдают учителю (или вкладывают в карманы наборного полотна) по 2 кружочка. Учитель сопровождает эти действия фразами, составленными вместе с учащимися: «По 2 взяли 1 раз — получили 2; по 2 взяли 2 раза — получили 4; по 2 взяли 3 раза — получили 6» и т. д.

Ученики, отдавшие кружочки, становятся рядом с учителем. Произносится заключительная фраза: «По 2 взять 3 раза — получится 6», и на доске записывается пример: $2 \cdot 3 = 6$. Итог: стоят рядом с учителем 3 ученика, в руках учителя 6 кружочков.

Сразу же решается обратная задача. Учитель говорит: «Если в прямой задаче на умножение мы собирали кружочки, то в обратной задаче будем не собирать, а раздавать кружочки. По скольку кружочков нам надо раздавать?» (По 2).

Учитель отделяет от 6 кружочков 2 кружочка и отдает их одному ученику, который отходит в угол класса.

Учитель говорит: «Два кружочка мы отдали».

От оставшихся кружочков отделяют еще 2 кружочка и отдают второму ученику. (Два человека получили кружочки).

Наконец последние два кружочка получает *третий* ученик.

*Учитель.* По два кружочка получили три ученика. Сколько мы всего раздали кружочков? (Записывает число 6). Как мы разделили эти кружочки? По скольку мы делили? По скольку мы раздавали каждому? (Записывает: 6: по $2=3$).

Сколько учеников получили кружочки? (Три.)

Учитель дописывает: 6: по $2=3$ (раза).

На доске появились рядом две записи:

| *Умножение:* | *Деление:* |
|---|---|
| $2+2+2=6$, | $6-2-2-2=0$, |
| по $2 \cdot 3=6$. | 6 : по $2=3$. |

Оба примера прочитываются снова: по 2 взять 3 раза — получится 6; 6 разделить по 2 — получится 3 раза. Или: по 2 кружочка взять 3 раза — получится 6 кружочков; 6 кружочков разделить по 2 кружочка — получат 3 ученика.

В заключительной беседе учащиеся снова сравнивают процессы решения двух задач. В задаче на умножение мы говорим «взять столько-то раз» и пишем знак умножения (точку). В задаче на деление мы говорим «разделить по стольку-то» и пишем знак деления (двоеточие).

Затем учащиеся показывают ответы прямой и обратной задач и делают вывод: в прямой задаче мы подсчитали (нашли, получили), сколько всего кружочков; в обратной задаче мы подсчитали (нашли, получили), скольким ученикам достались кружочки.

Первые уроки по одновременному изучению умножения и деления должны быть посвящены педантичной обработке самих логических операций, всячески подкрепляемых развернутой практической деятельностью по собиранию и раздаче различных предметов (кубиков, грибов, палочек и т. п.), но последовательность развернутых действий должна оставаться одной и той же (как это было показано выше).

Результатом такой работы и будут таблицы умножения и деления, записываемые рядом:

| | |
|---|---|
| по $2 \cdot 2 = 4$, | 4:по $2 = 2$, |
| по $2 \cdot 3 = 6$, | 6:по $2 = 3$, |
| по $2 \cdot 4 = 8$, | 8: по $2 = 4$, |
| по $2 \cdot 5 = 10$, | 10: по $2 = 5$ и т. д. |

Таким образом, таблица умножения строится по постоянному множимому, а таблица деления — по постоянному делителю.

Полезно также предложить учащимся в паре с данной задачей структурно противоположное упражнение по переходу от деления к вычитанию равных вычитаемых.

В повторительных упражнениях полезно предлагать задания такого вида: $14:2=$.

*Изучение деления на равные части.* После того как изучены или повторены совместно умножение числа 2 и деление по 2, на одном из уроков вводится понятие «деление на равные части» (третий вид задачи первого цикла).

Рассмотрим задачу: «Четыре ученика принесли по 2 тетради. Сколько всего тетрадей принесли?»

Учитель объясняет: по 2 взять 4 раза — получится 8.

(Появляется запись: по $2 \cdot 4 = 8$.) Кто составит обратную задачу?

Выполняя умножение, мы собирали тетради. Что будем делать при делении по два?

8 тетрадей раздали по 2 тетради каждому ученику — получится 4 (тетрадей хватило 4 ученикам).

Появляется запись:

по 2 т. $\cdot 4 = 8$ т.; 8 т. : по 2 т. $= 4$ (ученика).

На первых порах надо пользоваться подробной записью чисел с наименованиями (в делимом, делителе и частном).

Теперь составим третью задачу: «8 тетрадей надо раздать поровну четырем ученикам. По скольку тетрадей достанется каждому?»

Вначале деление на равные части также следует демонстрировать на основе реальных манипуляций с предметами.

Учитель отсчитывает 8 тетрадей.

Скольким ученикам надо раздать 8 тетрадей? (Четырем.)

К доске вызывают четырех учеников. Сначала раздают по 1 тетради каждому ученику. Оставшиеся 4 тетради снова раздают по 1 тетради каждому. Все тетради розданы.

По скольку тетрадей получил каждый ученик? (По 2 тетради.)

На доске записывается три примера:

по 2 т. $\cdot 4 = 8$ т.,
8 т.: по 2 т. $= 4$ (ученика),
8 т.:на 4 = по 2 т.

В других случаях противопоставляются задачи двух видов деления: деления по содержанию и деления на равные части.

10 карандашей раздали ученикам, по 2 карандаша каждому. Сколько учеников получили карандаши?

10 кар.:по 2 кар. = 5 (учеников).

*Учитель.* Кто придумает задачу на другой вид деления, чтобы при решении ее сразу надо было бы вызывать 5 человек?

(К доске вызывают 5 учеников, им раздают отсчитанные 10 карандашей, сначала по одному карандашу, затем еще по одному.)

Записываются рядом три примера:

по $2 \cdot 5 = 10$, 10:по2 = 5, 10:на5 = по 2.

В результате такой работы появляются три таблицы: одна — на умножение, две другие — на деление (*по* содержанию и *на* равные части). (Важно подчеркивать грамматически и логически смысл предлогов *на* и *по*).

С помощью учителя записываются первые строчки этих таблиц:

| | | |
|---|---|---|
| по $2 \cdot 2 = 4$, | 4:по 2 = 2, | 4 : на 2 = по 2, |
| по $2 \cdot 3 = 6$, | 6:по 2 = 3, | 6 : на 3 = по 2, |
| по $2 \cdot 4 = 8$. | 8:по 2 = 4, | 8 : на 4 = по 2. |

Далее учитель формулирует задачу: «10 яблок раздали по 2 яблока каждому ученику. Скольким ученикам дали яблоки?»

*Учитель.* Кто составит обратную задачу на умножение?

*Дети.* «5 учеников принесли по 2 яблока. Сколько всего яблок они принесли?» (По 2 взять 5 раз — получится 10; принесли 10 яблок.)

Соответствующий пример записывается в левом столбике.

*Учитель.* Кто составит обратную задачу на деление на равные части?

*Дети.* «10 яблок раздать поровну 5 ученикам — получится по 2». (Или: «10 яблок разделить на 5 равных частей — получится по 2».)

На уроках по изучению умножения и деления широко применяется метод решения взаимно-обратных задач, где дети используют названия «прямая задача» и «обратная задача».

Рассмотрим задачу: «Четыре пионерских звена посадили по 3 грядки моркови. Сколько грядок моркови посажено пионерами?»

*Решение.* 3 гр. $\cdot 4 = 12$ гр.

После решения задачи учитель анализирует ее вместе с учащимися. Выясняется, что в условии задачи были даны два числа (по 3 грядки, 4 звена); при решении найдено третье число — 12 грядок. Появляется запись: по 3 гр., 4 звена, 12 гр. Затем учитель рядом с этой записью пишет справа схему обратной задачи, разъясняя: «Если в прямой задаче число 12 грядок не было дано, но его нашли при решении, то в обратной задаче сделаем его известным, а число 4 звена сделаем неизвестным».

На доске появляется запись:

| *Прямая задача:* | *Обратная задача:* |
|---|---|
| **по 3 гр., 4 звена, 12 гр.** | **по 3 гр., □, 12 гр.** |
| ***Решение.*** | ***Решение*** |
| **По 3 гр. $\cdot 4 = 12$ гр.** | . . . . . |

Учитель, указывая поочередно на числа 12 гр., по 3 гр., постепенно добивается формулировки новой задачи: «12 грядок моркови посажено несколькими пионерскими звеньями. Каждое звено посадило по 3 грядки».

*Учитель* (указывает на пустой квадрат схемы). Кто сформулирует вопрос задачи?

*Дети.* Сколько пионерских звеньев сажали морковь?

*Учитель.* Кто повторит задачу полностью? Каким действием мы решим задачу?

Наконец в правой половине доски (страницы) записывается решение задачи: | *Решение.* 12 гр.: по 3 гр. = 4 (звена).

Составляется также вторая обратная задача по тому же условию: □, 4 звена, 12 гр.

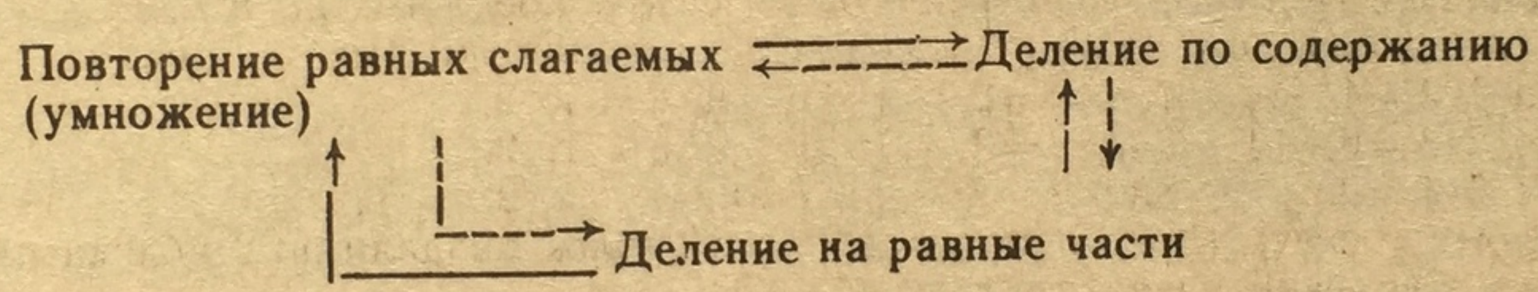
«12 грядок моркови посажено поровну 4 пионерскими звеньями. По скольку грядок посажено каждым звеном?»

*Решение.* 12 гр.:4 = по 3 гр.

Иногда следует записывать задачи рядом на оба вида деления.

| Деление *по* содержанию: | Деление *на* равные части: |
|---|---|
| 12 гр.:по 3 гр. = 4 (звена). | 12 гр.:4 = 3 гр. |

В результате применения описанной методики в сознании школьника возникает циклическая система связей из трех разновидностей задач, образующих целостный цикл:




## § 27. ИЗУЧЕНИЕ ЗАДАЧ НА УМЕНЬШЕНИЕ И УВЕЛИЧЕНИЕ ЧИСЛА В НЕСКОЛЬКО РАЗ И НА КРАТНОЕ СРАВНЕНИЕ ВЕЛИЧИН

*Одновременное изучение задач на уменьшение и увеличение числа в несколько раз.* По характеру связей указанная в названии параграфа вторая тройка задач совершенно аналогична циклу задач на действия первой ступени, а именно на уменьшение и увеличение числа на несколько единиц и разностное сравнение величин. Соответственно, оправдывается одновременное изучение первых двух видов задач и изучение сразу же вслед за ними задач на кратное сравнение величин.

Одновременное изучение задач на увеличение и уменьшение числа в несколько раз связано с изучением пар сопряженных понятий (больше — меньше, старше — моложе, дороже — дешевле и т. п.) в их постоянном противопоставлении и взаимопереходах.

Рассмотрим задачу: «Нотная тетрадь стоит 6 коп., а блокнот в 4 раза дороже. Сколько стоит блокнот?

*Учитель.* Сколько стоит нотная тетрадь?

*Дети.* Нотная тетрадь стоит 6 коп.

*Учитель.* Что сказано про цену блокнота?

*Дети.* Блокнот стоит в 4 раза дороже.

*Учитель.* Что значит «дороже в 4 раза»? Это значит, что вместо одного блокнота можно купить на те же деньги четыре нотные тетради. Как найти стоимость четырех нотных тетрадей?

*Дети.* По 6 коп. взять 4 раза — получится 24 коп.

*Учитель.* Четыре нотные тетради будут стоить 24 коп. Какова будет цена блокнота, если она больше цены нотной тетради в 4 раза?

*Дети.* Цена блокнота тоже 24 коп.

*Учитель.* Почему? Как вы узнали?

*Дети.* Потому, что один блокнот стоит столько же, сколько четыре нотные тетради. По 6 взять 4 раза — получится 24. После решения прямой задачи записывается ее схема: 6 коп., в 4 раза, □.

Затем составляется обратная задача, в которой используется понятие «в 4 раза дешевле».

*Учитель.* Если блокнот дороже тетради в 4 раза, то что можно сказать о нотной тетради?

*Дети.* Нотная тетрадь дешевле блокнота в 4 раза.

Записываем рядом с первой схемой схему обратной задачи: □, в 4 раза, 24 коп.

С помощью учителя составляется обратная задача.

*Учитель.* Во сколько раз нотная тетрадь дешевле блокнота?

*Дети.* Нотная тетрадь дешевле блокнота в 4 раза.

*Учитель* (показывает на число 24 коп.). Что означает это число?

*Дети.* Блокнот стоит 24 коп.

*Учитель.* Что надо узнать в обратной задаче?

*Дети.* Надо узнать цену нотной тетради.

Прочитывается полностью условие задачи: «Цена блокнота 24 коп. Нотная тетрадь в 4 раза дешевле блокнота. Найти цену нотной тетради».

*Учитель.* За что заплатили меньше денег: за блокнот или за нотную тетрадь? Во сколько раз заплатили меньше? В прямой задаче мы выполнили умножение и нашли цену блокнота, так как за блокнот заплатили больше, чем за тетрадь. А за тетрадь заплатили в 4 раза меньше, чем за блокнот. Каким действием мы найдем цену тетради? Сколько стоит тетрадь?

*Дети.* 24 коп. разделить на 4, получится 6 коп. Одна нотная тетрадь стоит 6 коп.

На доске и в тетрадях записываются рядом решения обеих задач:

| *Увеличение в несколько раз:* | *Уменьшение в несколько раз:* |
|---|---|
| 6 коп., в 4 раза дороже, □. | □, в 4 раза дешевле, 24 коп. |
| *Решение.* $6 \cdot 4 = 24$ (коп.). | *Решение.* $24 : 4 = 6$ (коп.). |

(Стрелками показаны направления чтения условия задачи по схеме).

После решения этих задач необходимо сравнить их условия и решения.

*Учитель.* В прямой задаче была дана цена тетради. А что требовалось узнать?

*Дети.* В прямой задаче была дана цена тетради — 6 коп. Надо было узнать цену блокнота.

*Учитель.* А как в обратной задаче — что было известно и что неизвестно?

*Дети.* В обратной задаче была известна цена блокнота — 24 коп., а надо было найти цену тетради.

*Учитель.* Какое число входило в условия обеих задач?

*Дети.* В обеих задачах было число «4 раза».

*Учитель.* В чем же тогда была разница между задачами? Какие слова стояли при этих числах?

*Дети.* В прямой задаче было сказано: «в 4 раза дороже», а в обратной — «в 4 раза дешевле».

*Учитель.* Если «дороже», то что это значит: заплатили больше или меньше? А если сказано «дешевле»?

*Дети.* Дороже — значит, больше заплатили, дешевле — значит меньше.

*Учитель.* Каким действием мы решили прямую задачу, обратную задачу?

*Дети.* Прямую задачу мы решили умножением, а обратную задачу — делением.

*Учитель.* Когда мы умножаем, что происходит с числом? Оно увеличивается или уменьшается?

*Дети.* Когда мы умножаем, число увеличивается; когда делим — уменьшается.

*Учитель.* Какая из этих задач на увеличение числа в несколько раз и какая на уменьшение числа в несколько раз?

*Дети.* Первая задача на увеличение числа в несколько раз, вторая — на уменьшение числа в несколько раз.

Такой подробный анализ проводится на первых уроках. В результате такого анализа задач в мышлении учащихся возникают связи двух родов:

1) «дороже в 4 раза» — «больше в 4 раза» — «увеличить в 4 раза» — «умножить на 4»;

2) «дешевле в 4 раза» — «меньше в 4 раза» — «уменьшить в 4 раза» — «разделить на 4».

Мы рассмотрели переход от задачи «на увеличение числа в несколько раз» к задаче «на уменьшение числа в несколько раз».

Вслед за такой парой задач полезно применить обратный переход от задачи «на уменьшение числа в несколько раз» к задаче «на увеличение числа в несколько раз».

Рассмотрим задачу: «Отцу 36 лет, а сын в 4 раза моложе отца. Сколько лет сыну?» *Решение.* 36:4=9 (лет).

Записывается схема задачи: 36 лет, в 4 раза моложе, □. Составляется схема обратной задачи: □, в 4 раза старше, 9 лет.

В последней схеме мы осуществили буквальное, как бы машинное, преобразование задачи. Читая схему слева направо, как и в случае прямой задачи, получим следующее условие: «Отцу несколько лет. Сын в 4 раза моложе его. Сыну 9 лет. Сколько лет отцу?» Однако учащиеся без труда совершают в уме промежуточное преобразование информации: «Если сын моложе отца в 4 раза, то отец старше сына в 4 раза». Поэтому можно схему обратной задачи сразу записывать в преобразованной форме: □, в 4 раза старше, 9 лет. Формулируется ее условие: «Сыну 9 лет, а отец в 4 раза старше сына. Сколько лет отцу?»

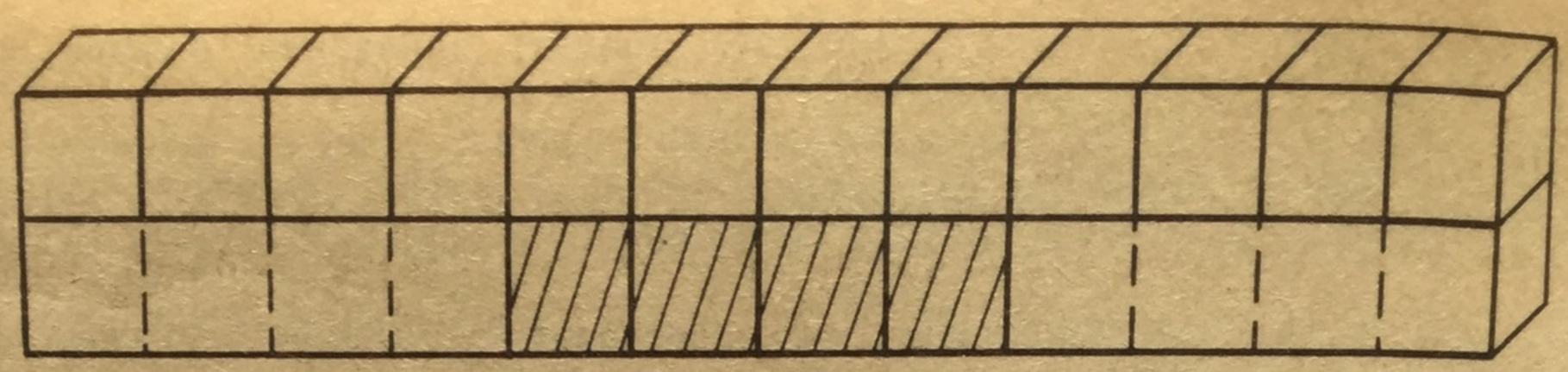
*Решение.* 9·4=36 (лет).

Решения задач записываются рядом:

| ***Прямая задача:*** | ***Обратная задача:*** |
|---|---|
| **36 лет, в 4 раза, □.** | **□, в 4 раза, 9 лет.** |
| ***Решение.* 36 : 4=9 (лет).** | ***Решение.* 9·4=36 (лет).** |
| **Ответ: сыну 9 лет.** | **Ответ: отцу 36 лет.** |

*Изучение кратного сравнения величин.* Задачи на кратное сравнение величин составляют третью разновидность изучаемой группы задач. Их следует рассматривать в связи с предшествовавшими им задачами на увеличение и уменьшение числа в несколько раз.

В качестве главных наглядных пособий, посредством которых



$4 \cdot 3 = 12$ $12 : 4 = 3$ (раза)

**Рис. 43**

вводится кратное сравнение, наиболее удобны, как и в случае разностного сравнения, цветные бруски различной длины, расчерченные на кубики (квадраты).

Пусть имеются 3 синих бруска, по 4 кубика в каждом, один красный и один синий брусок — длиной в 12 кубиков каждый (рис. 43). Сначала берем один синий брусок в 4 кубика.

*Учитель.* Сколько кубиков в этом синем бруске?

*Дети.* В синем бруске 4 кубика.

*Учитель.* Как увеличить брусок в 3 раза? Сколько раз надо взять для этого по такому синему бруску? Сколько всего получилось кубиков?

*Дети.* По 4 взять 3 раза — получится 12 кубиков. (К 3 брускам, положенным вплотную в ряд, сверху накладываются синий и красный бруски.)

Выясняется, что эти бруски имеют по 12 кубиков.

*Учитель.* Если длинный брусок, состоящий из 12 кубиков, разделить на такие части (показывает маленькие бруски в 4 кубика), то сколько таких коротких брусков мы получим?

*Дети.* Получим 3 таких бруска.

*Учитель.* Мы научились с вами сравнивать длины красного бруска в 12 кубиков и синего бруска в 4 кубика. Какой брусок длиннее? короче? во сколько раз?

*Дети.* Красный брусок длиннее синего в 3 раза. Синий брусок короче красного в 3 раза.

*Учитель.* Каким действием мы нашли число 3?

*Дети.* 12 кубиков разделить по 4 кубика — получится 3 раза.

Рядом записываются условия и решения двух задач:

| *Увеличение в несколько раз:* | *Кратное сравнение:* |
|---|---|
| 4 куб., в 3 раза больше, □. | 4 куб., □, 12 куб. |
| *Решение.* $4 \cdot 3 = 12$ (куб.). | *Решение.* $12 : 4 = 3$ (раза). |

Затем решаются устно пары задач на сравнение длин зеленого бруска длиной в 5 кубиков и черного длиной в 10 кубиков и т. п.

В дальнейшем задачи решаются без наглядных пособий, причем в качестве исходной задачи может быть взята либо задача на уменьшение числа в несколько раз, либо задача на кратное сравнение. Изучение темы завершается упражнениями, когда по одному сюжету и набору чисел составляются и решаются все три задачи.

Рассмотрим задачу: «Масса тюка 24 кг, а коробки — 3 кг. Во сколько раз тюк тяжелее коробки?»

*Решение.* 24:3=8 (раз).

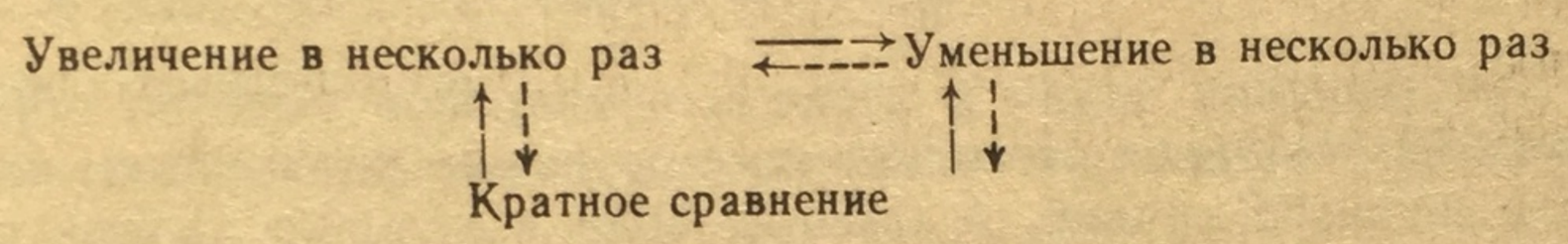
Записывается схема задачи: 24 кг, 3 кг, □. Составляется схема обратной задачи: 3 кг, □, 8 раз, и формулируется ее условие: «Масса коробки 3 кг, а тюк в 8 раз тяжелее коробки. Какова масса коробки?»

*Решение.* 3·8=24 (кг).

Наконец составляется схема третьей задачи: 24 кг, □, 8 раз.

Условие задачи: «Масса тюка 24 кг, а коробка в 8 раз легче. Какова масса коробки?»

В результате такой работы в мышлении учащегося возникает замкнутая система связей из трех задач:




## § 28. ПРОТИВОПОСТАВЛЕНИЕ ЗАДАЧ НА РАЗНОСТНОЕ И КРАТНОЕ СРАВНЕНИЕ

Одна из распространенных ошибок учащихся — подмена одного вида сравнения другим. Чтобы выработать умение различать эти задачи, надо проводить противопоставление их по трем линиям: 1) увеличение на несколько единиц и увеличение в несколько раз; 2) уменьшение на несколько единиц и уменьшение в несколько раз; 3) разностное сравнение и кратное сравнение.

*Увеличить на несколько единиц:*
Слева — 4 яблока, а справа — на 3 яблока больше. Сколько яблок справа?
*Решение.* 4+3=7 (ябл.).

*Увеличить в несколько раз:*
Слева — 4 яблока, а справа — в 3 раза больше. Сколько яблок справа?
*Решение.* 4·3=12 (ябл.).

*Меньше на несколько единиц:*
Вверху нарисовано 6 кружочков, а внизу на 2 кружочка меньше. Сколько кружочков нарисовано внизу?
*Решение.* 6—2=4 (круж.).

*Меньше в несколько раз:*
Вверху нарисовано 6 кружочков, а внизу в 2 раза меньше. Сколько кружочков нарисовано внизу?
*Решение.* 6:2=3 (круж.).

*На сколько единиц меньше (больше):*
Мише 12 лет, а Нине 3 года. На сколько лет Миша старше Нины?
*Решение.* 12—3=9 (л.).

*Во сколько раз меньше (больше):*
Мише 12 лет, а Нине 3 года. Во сколько раз Миша старше Нины?
*Решение.* 12:3=4 (раза).

Иногда следует решать задачи с несколькими вопросами, например: «У Вали 80 см красной ленты, а синей — 20 см. Ответить на следующие вопросы:

1) Сколько всего сантиметров ленты было куплено?
2) На сколько сантиметров красная лента длиннее синей?
3) Во сколько раз красная лента длиннее синей?»

*Решение:* 1) 80+20=100 (см); 2) 80—20=60 (см); 3) 80:20=4 (раза).

Целесообразно последнее упражнение сочетать со структурно противоположным упражнением, когда к данным числам придумываются три вопроса: «Книжка стоит 35 коп., а общая тетрадь — 5 коп.».

Требуется поставить к этому условию три разных вопроса так, чтобы первый вопрос решался делением, второй сложением, третий — вычитанием; решить составленные задачи.

Учащиеся находят в соответствии с заданием следующие вопросы к задаче:

1) Во сколько раз книга дороже тетради?

$$35:5=7 \text{ (раз)}.$$

2) Сколько стоят вместе книга и тетрадь?

$$35+5=40 \text{ (коп.)}.$$

3) На сколько копеек книга дороже тетради?

$$35-5=30 \text{ (коп.)}.$$

При решении задач в несколько вопросов уместно обратить внимание учащихся не только на смысловые ассоциации, но и на связи низшего уровня. А именно, если в условии задачи встречаются два одноименных числа (имеющих одно и то же наименование), то они могут быть связаны одним из трех способов: либо делением, либо сложением, либо вычитанием, но никак не умножением.

## § 29. ИЗУЧЕНИЕ ЗАДАЧ НА НАХОЖДЕНИЕ ЧАСТИ ЧИСЛА, ЧИСЛА ПО ВЕЛИЧИНЕ ЕГО ЧАСТИ; РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТИПА: «КАКУЮ ЧАСТЬ СОСТАВЛЯЕТ ОДНО ЧИСЛО ОТ ДРУГОГО?»

*Одновременное изучение задач на нахождение одной части числа и числа по величине одной его части.* В данном параграфе речь идет о трех задачах, составляющих третий цикл простых задач на умножение и деление. Как мы уже отмечали выше, простейшие взаимно-обратные задачи данного цикла целесообразно рассматривать также одновременно.

Рассмотрим эту методику на конкретном примере. Вводим понятия: половина (одна вторая), треть (одна третья), четверть (одна четвертая), одна пятая, для чего делим круг на соответствующее число долей (рис. 44). Вводим записи дробей:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}.$$

Учимся читать и записывать эти дроби. Затем проводим беседу:

— Сколько половин в одной булке?

— В одной булке две половины, в одной булке две вторые доли (рис. 44).

Записываем так: $1=\frac{2}{2}$.

— Сколько четвертей в одной целой булке?

— В одной целой четыре четверти.

Это записывается так: $1=\frac{4}{4}$.

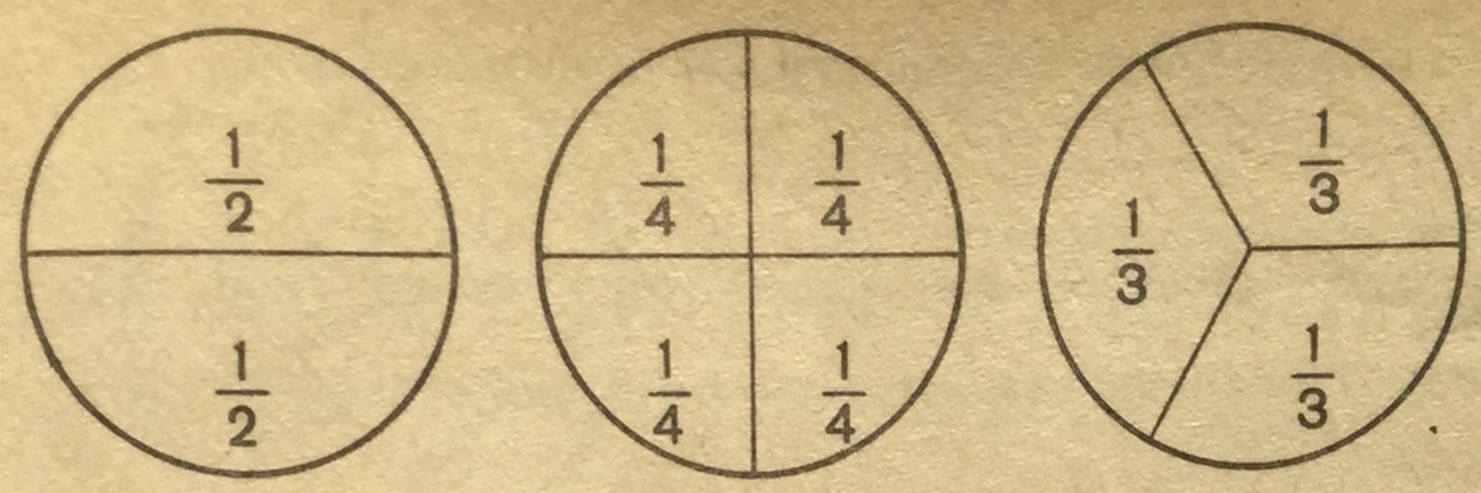



Рис. 44

— Сколько третей в одном целом?
— В одном целом три трети.

Это записывается так: $1=\frac{3}{3}$.

Впоследствии учащимся предлагаются следующие вопросы: сколько восьмых долей содержится в одном целом? (Или символически: $1=\frac{\square}{8}$.) В одном целом содержится пять долей. Какие это доли? (Или символически: $1=\frac{5}{\square}$.)

Можно предложить и обобщенные задания:

$$1=\frac{a}{\square};\ 1=\frac{\square}{x}.$$

Затем рассматриваются сразу два вида задач: на нахождение части числа и числа по величине его части. Для этого круг делится, например, на четыре равные части. Круг означает булку хлеба. Стоимость всей булки — 32 коп. (рис. 45).

*Учитель.* Булку хлеба разделили поровну четырем ученикам. Какую часть получил один ученик?

*Дети.* Одному ученику досталось четвертая часть, или одна четвертая часть.

*Учитель.* Что дороже: целая булка или четвертая ее часть? Во сколько раз дороже?

*Дети.* Целая булка дороже четвертой части в четыре раза.

*Учитель.* А как иначе сказать, применяя слово «дешевле»?

*Дети.* Четвертая часть булки дешевле целой булки в четыре раза.

*Учитель.* Как найти, сколько стоит четвертая часть булки?

*Дети.* 32 коп. разделить на 4 — получится 8 коп. (стоит четвертая часть булки).

Далее составляется обратная задача: «Четвертая часть булки стоит 8 коп. Сколько стоит вся булка?»

Что дороже: целая булка или ее четвертая часть? Во сколько раз дороже? Как найти стоимость булки, зная стоимость ее четвертой части?

*Дети.* Целая булка дороже ее четвертой части в 4 раза; 8 коп. умножить на 4 — получится 32 коп. Вся булка стоит 32 коп.

После решения пары задач проводится беседа по сравнению условий обеих задач и процессов их решения.

Учитель, показывая на схему, спрашивает: «Какие числа были даны в прямой задаче?» Усло-

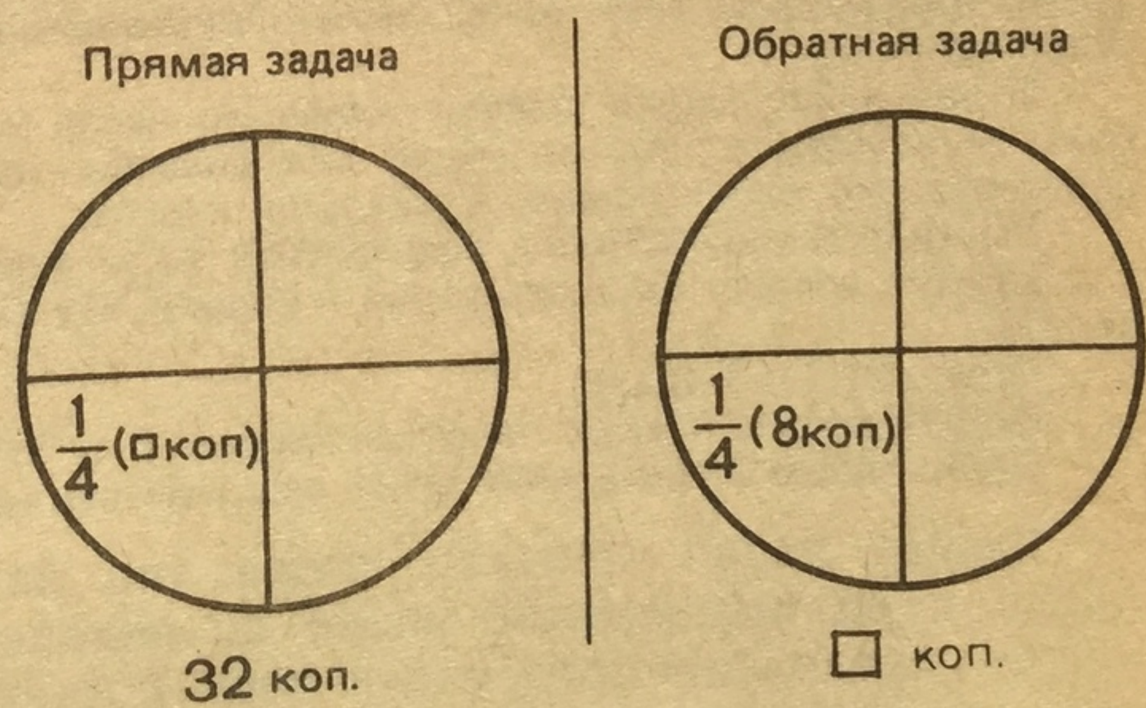



Рис. 45

вимся называть прямой ту задачу, которая решается первой».

*Дети.* 32 коп., $\frac{1}{4}$, □.

*Учитель.* Что они означают?

*Дети.* Булка стоит 32 коп. Надо найти, сколько стоит одна четвертая часть булки.

*Учитель.* А в обратной задаче какие числа были даны?

*Дети.* □, $\frac{1}{4}$, 8 коп.

*Учитель.* Что обозначают эти числа?

*Дети.* В прямой задаче надо найти, сколько стоит четвертая часть булки, в обратной — сколько стоит вся булка.

*Учитель.* Каким действием решили прямую задачу? Каким действием решили обратную задачу?

*Дети.* Прямую задачу решили действием деления, обратную задачу — действием умножения.

На следующих уроках можно предложить сначала задачу на нахождение числа по его части, а затем преобразовать ее в задачу на нахождение части числа.

Например, вначале решается задача: «Купили несколько яблок. Третья часть яблок составляет 7 штук. Сколько всего было яблок?»

*Решение.* $7 \cdot 3 = 21$ (ябл.).

Записывается схема решенной задачи: 7 ябл., $\frac{1}{3}$, □. Составляется схема обратной задачи: □, $\frac{1}{3}$, 21 ябл. Формулируется ее условие: «Купили 21 яблоко. Найти $\frac{1}{3}$ часть их».

*Решение.* $21:3=7$ (ябл.).

Решения обеих задач записываются рядом.

| ***Найти часть числа:*** | ***Найти число по его части:*** |
|---|---|
| **21 ябл., 1/3, □.** | **□, 1/3, 7 ябл.** |
| ***Решение.* 21 : 3=7 (ябл.).** | ***Решение.* 7·3=21 (ябл.).** |

Мы рассмотрели две взаимно-обратные задачи. С той же ситуацией можно составить и третью задачу вида: «Какую часть составляет одно число от другого?»

7, 1/3, □ — прямая задача,

□, 1/3, 21 — 1-я обратная задача,

7, □, 21 — 2-я обратная задача.

Условие третьей задачи данного цикла: «Купили 21 яблоко. Из них 7 яблок съели. Какую часть всех яблок съели?» Решение задачи можно пояснить на рисунке (рис. 46).

В начальной школе деление меньшего числа на большее (с дробным ответом) не изучается. Тем не менее для полноты знаний этот третий тип задач целесообразно также решать в младших классах.

Решение осуществляется посредством пары вопросов.

Первый вопрос. Во сколько раз 7 меньше 21? (Или: во сколько раз 21 больше 7?)

Ответ: $21:7=3$ (раза).

Второй вопрос. Какую часть составляет 7 от 21?

Ответ: число 7 составляет от 21 одну третью часть.

Тройку задач третьего цикла (на нахождение одной части числа и на нахождение числа по величине его одной части, а также определение того, какую часть составляет одно число от другого) важно рассматривать на всем протяжении изучения табличного умножения и деления в начальной школе.

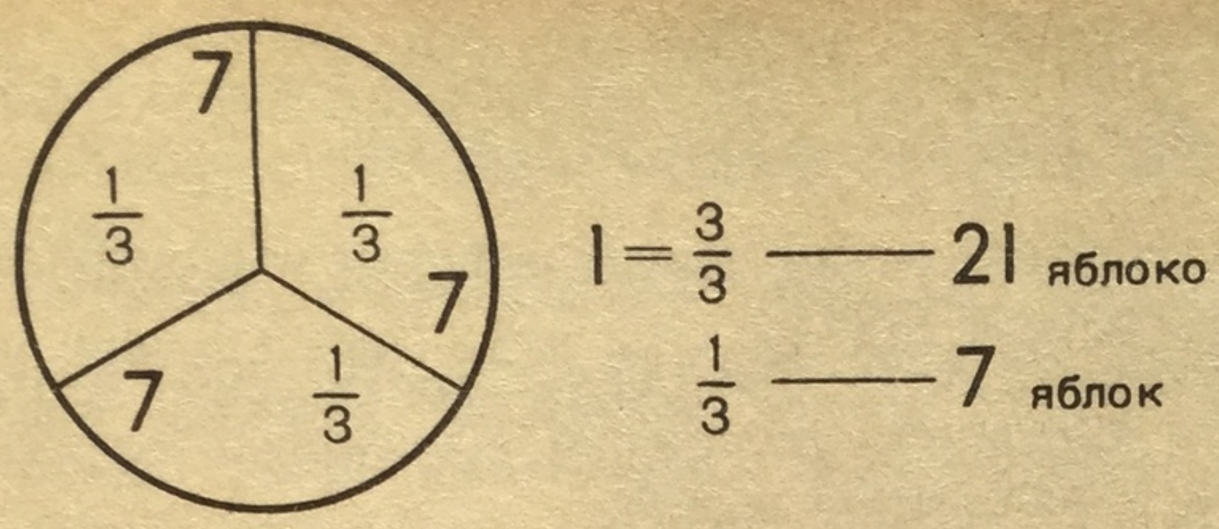



**Рис. 46**

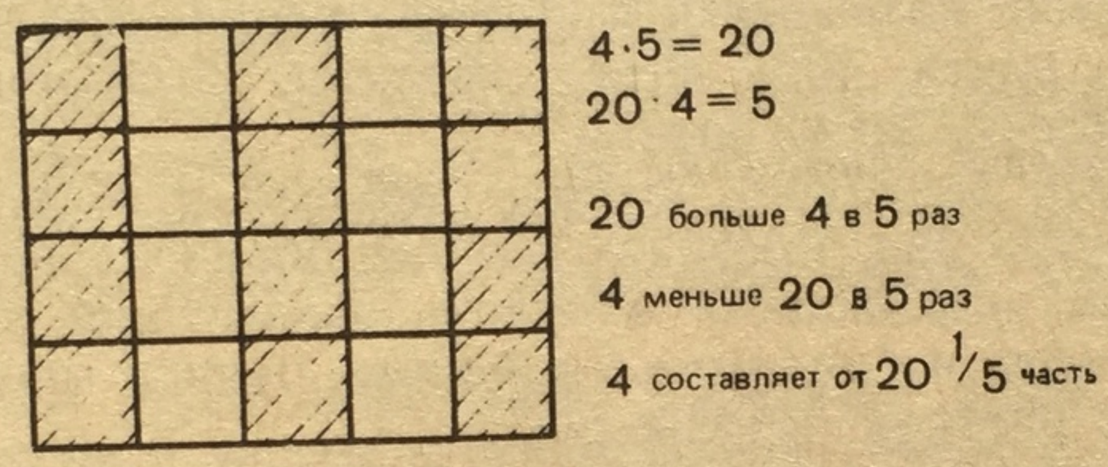



**Рис. 47**

В практику рассуждений уместно включить с самого начала обработку результата умножения посредством трех вопросов. Например, пусть вычислено: по 4 взять 5 раз — получится 20.

Необходимо приучать детей к чтению зависимости между числами 4, 5, 20 тремя способами в следующей последовательности: 1) 20 больше 4 в 5 раз; 2) 4 меньше 20 в 5 раз; 3) 4 составляет от 20 его $\frac{1}{5}$ часть (рис. 47).

Уместно предложить для восстановления и деформированные упражнения (ученик должен вставить внутрь клеток соответствующие числа):

число 6 составляет $\frac{1}{\square}$ от 12,

число $\square$ составляет $\frac{1}{3}$ от 24,

число 9 составляет $\frac{1}{7}$ от $\square$.

Вместо заключения

# О ПУТЯХ СОВЕРШЕНСТВОВАНИЯ ПРОГРАММ И УЧЕБНИКОВ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЫ

Советская страна осуществляет реформу общеобразовательной и профессиональной школы.

В настоящее время возникли достаточно благоприятные условия для коренного улучшения постановки математического образования в начальной школе:

1) начальная школа из трехлетней преобразована в четырехлетнюю;

2) на изучение математики в первые четыре года выделяется 700 ч., т. е. почти 40% всего времени, отводимого этому предмету за всю среднюю школу;

3) учителями начальной школы работает с каждым годом все большее число лиц, имеющих высшее образование;

4) возросли возможности лучшего обеспечения учителей и школьников учебно-наглядными пособиями, причем многие из них выпускаются в цветном исполнении.

Нет необходимости доказывать решающую роль начального обучения математике для развития интеллекта ученика вообще. Богатство базисных ассоциаций, обретаемых школьником за первые четыре года обучения, при правильной постановке дела становится главным условием самонаращивания знаний в последующие годы. Если этот запас исходных представлений и понятий, ходов мыслей, основных логических приемов будет неполон, негибок, обеднен, то при переходе в старшие классы школьники будут постоянно испытывать трудности, независимо от того, кто их будет учить дальше или по каким учебникам они будут учиться.

Как известно, начальная школа функционирует в нашей и других странах много веков, в то время как всеобщее среднее образование осуществляется лишь несколько десятилетий. Понятно отсюда, что теория и практика начального обучения гораздо богаче своими добротными традициями, чем обучение в старших классах.

Драгоценные методические находки и обобщения по начальному обучению математике были сделаны еще Л. Н. Толстым, К. Д. Ушинским, С. И. Шохор-Троцким, В. Латышевым и другими методистами уже в прошлом веке. Значительные результаты были получены в последние десятилетия по методике начальной математики в лабораториях Л. В. Занкова, А. С. Пчелко, а также в исследованиях по укрупнению дидактических единиц.

Между тем современное состояние дела обучения в начальной школе таково, что эффективные пути его совершенствования, освоенные учителями в недавние годы, оказались неожиданно

обойденными последними редакциями программ и учебников (1984, 1985). Серьезный недостаток действующих сейчас программ — это нарушение преемственности с программами для средних классов.

Так, например, в программах начальных классов не решена проблема пропедевтики ряда важных понятий, которая успешно достигалась ранее в начальной школе. Такой пропедевтики не получилось из-за вымученного растягивания программами традиционного материала, который раньше осваивали гораздо быстрее и продуктивнее. Программа нынешней четырехлетней школы стала менее информативной, чем предшествовавшая ей программа для трехлетней школы (!!).

При разумном учете наличных научных результатов, полученных в последние 20 лет по методике начального обучения различными творческими коллективами, сейчас имеется полная возможность добиться в начальной школе «учения с увлечением».

Но для этого необходимо знакомить детей уже в начальных классах с рядом отсутствующих сейчас в программах тем и понятий, например: с объемом прямоугольного параллелепипеда; признаками делимости на 2, 5, 10; задачами на построение с помощью транспортира, циркуля и линейки; задачами на проценты с круглыми числами; приемами устного счета и вычисления на русских счетах и некоторыми другими. Без этого математика начальных классов — не математика!

Пропедевтическое знакомство с этими темами (понятиями), несомненно, положительно скажется на освоении учащимися соответствующих знаний в старших классах.

В данной связи уместно вспомнить замечание Ф. Энгельса, который писал следующее: «Наука движется вперед пропорционально массе знаний, унаследованных ею от предшествующего поколения»[1].

Мы убеждены в связи с этим, что лишение малыша доступного и необходимого знания обернется для него уроном, не восполнимым никогда позже.

*О психологических закономерностях обучения математике в начальной школе.* Для практики начального обучения математике имеет важнейшее значение прием совмещения на одном уроке (в пространстве одной страницы учебника) взаимнообратных задач. Поэтому представляется совершенно необходимым пользоваться традиционными названиями основных видов сопоставляемых друг другу задач: если повторение равных слагаемых выступает как умножение, то и обратные им задачи (деление на равные части и деление по содержанию) должны использоваться в учебниках, при планировании и проведении

[1] *Маркс К., Энгельс Ф.* Соч. Т. 1. С. 568.

уроков. В действующих программах мы не находим привычных понятий: задач на нахождение суммы, нахождение чисел по двум суммам, на приведение к единице, на пропорциональное деление и т. п. Такое положение отнюдь не является достоинством программ.

Психологом Ж. Пиаже была установлена фундаментальная закономерность обратимости операций, с которой связано методическое понятие «обратная задача».

В ходе испытания наших экспериментальных учебников в школе № 82 Ногинского района Московской области было установлено, что навыки преобразования прямой задачи в обратную являются исключительно ценным средством самостоятельного освоения учеником сущности изучаемого.

Вот тому пример. В I классе дети решают примеры $3+1=4$; $4-1=3$.

Увеличить и уменьшить число на несколько единиц — задача доступная и понятная им. Но вот возникает сомнение: надо ли первокласснику предлагать вопрос: «На сколько 4 больше 3? На сколько 3 меньше 4?» Задача такого вида — это новое научное понятие, первое дыхание проблемности.

Будет неправомерно, если задаче на разностное сравнение не найдется места в учебнике, причем на той же самой странице, где выполняется увеличение и уменьшение на несколько единиц.

Целостные триады задач, подобные данной (на увеличение и уменьшение на несколько единиц и на разностное сравнение), рассматриваемые во взаимопревращениях друг в друга, обеспечивают освоение любой темы. То же самое верно и относительно аналогичной группы задач на действия второй ступени: на увеличение и уменьшение числа в несколько раз и на кратное сравнение чисел.

Соответственно последняя задача точно так же не должна отрываться от первых двух, все они должны рассматриваться во внутренних связях и переходах. Крайне важно, чтобы указанные названия (разностное и кратное сравнение) употреблялись в соответствующих местах программы, учебника, конспекта уроков.

*Прямая задача:* «Коле 5 лет, а Нина в 2 раза старше, Сколько лет Нине?»

*Решение.* $5 \cdot 2=10$ (лет).

*1-я обратная задача:* «Нине — 10 лет, а Коля в 2 раза младше. Сколько лет Коле?»

*Решение.* $10:2=5$ (лет).

*2-я обратная задача:* «Нине — 10 лет, а Коле — 5 лет. Кто из них старше и во сколько раз?»

*Решение.* $10:5=2$ (раза). Нина старше Коли в 2 раза.

*Структурная информация в начальном обучении.* В исследованиях, проведенных нами еще 30 лет назад, была установлена

исключительная познавательная ценность для детей заданий на «составление обратной задачи». Однако действующая сейчас в школе система обучения пронизана линией раздельного изучения взаимосвязанных задач — без преобразования их друг в друга. Многократно испытанной методической истиной является то, что всякая простая задача (в одно действие), где бы она ни изучалась, должна быть освоена через превращение ее в «свое другое», как сказали бы об этом философы. Такая трактовка места и роли обратных задач должна найти отражение в программах и учебниках.

Если, скажем, изучается таблица умножения, то она должна рассматриваться совместно с соответствующими случаями деления:

| | | |
|---|---|---|
| $2 \cdot 5 = 10$, | $10:2=5$, | $10:5=2$, |
| $2 \cdot 6 = 12$, | $12:2=6$, | $12:6=2$, |
| ... | ... | ... |

Выгодно этот же подход перенести и на более сложные случаи, например на умножение и деление двузначных чисел ($17 \cdot 5$ и $85:5$) или на письменное умножение и деление:

$$\begin{array}{r} 172 \\ \times \quad 43 \\ \hline 516 \\ 688\phantom{0} \\ \hline 7396 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 7396 & 172 \\ \cline{2-2} 688 & 4... \end{array}$$

Обозначим условно информацию, связанную с умножением, буквой *а*, а информацию, связанную с делением, — буквой *б*. Тогда знания, связанные с этими действиями, представляют как бы две порции знания. Если же операции *а* и *б* мы сверх того совместим во времени (преобразуя, скажем, пример на умножение $5 \cdot 7 = 35$ в пример на деление с теми же числами $35:5=7$), то возникает новая информация — третья порция знаний, которую обозначим *аб*.

Информация *аб* связана с пониманием множества переходов: произведение становится делимым, множитель становится частным, появляется факт проверки ответа исходного примера обратным действием и т. п. Эффективность подобного укрупнения знаний объясняется в первую очередь закономерностями оперативной памяти.

Психологи установили, что всякая информация, воспринятая человеком, продолжает циркулировать в подсознании (в неосознаваемой форме) в течение 20—30 мин. И вот, если при умножении 172 на 43 нами получено промежуточное произведение

688, то это же число легче всего проявляется (актуализируется) при решении обратной задачи на деление «уголком» (7396:172). Связь мыслей «умножение — деление» как бы прокручивается здесь дважды.

Таково психофизиологическое объяснение полученных на практике преимуществ соединения в целостные блоки сложения и вычитания, умножения и деления, прямой и обратной задач вообще.

Для образности рассуждений позволим себе здесь грубое сравнение: в питании важно учитывать наличие не только калорий, но и витаминов! Подобно этому информация, связанная с переходом между сложением и вычитанием, представляется наиболее ценным компонентом для последующего развития мышления; чем раньше ученик познал таинство перехода от $2+1$ к $3-1$, тем легче ему будет впоследствии постигать тем же способом связь между прямой и обратной задачами (функциями, теоремами), между дифференциалом и интегралом.

*О математической символике и терминологии.* Математику справедливо называют особым языком. Характерная черта математики — широкое применение в ней специальных знаков, символов, позволяющих точно и обобщенно выражать соответствующие формы мыслей. Благодаря специальной символике совершается синтез математического и логического.

Слов нет, иногда методисты допускают неуемное увлечение символическим аппаратом. Например, раннее решение задач с помощью уравнений не оправдало себя, коль скоро эти задачи могут быть решены не алгебраическим приемом, а на основе здравого смысла, т. е. арифметически.

Пусть далее речь идет об ознакомлении первоклассников с переместительным законом сложения:

$$1+2=2+1,$$
$$2+3=3+2,$$
$$2+4=4+2,$$
$$\dots\dots\dots$$
$$a+b=b+a.$$

Буквенная запись этого закона должна встречаться систематически во всех соответствующих случаях, предваряя или завершая цикл суждений. Вначале данное равенство просто читается: «$a$ плюс $b$ — равно $b$ плюс $a$». Постепенно выясняется тот смысл, что за этими буквами подразумеваются любые числа (но одни и те же числа в обеих частях равенства). Через многократные повторы приходим к осмыслению истины: от перестановки слагаемых сумма не изменяется.

Применяемая символика должна сопровождаться соответствующей математической терминологией. Неразумно обходиться здесь «инфантильными» словосочетаниями вида «перестановка чисел» вместо строгого и точного «переместительный закон сложе-

ния (умножения)». Так же нельзя, конечно, заменять узловые понятия начальной школы «десяток», «сотня», «тысяча» простым перечислением элементов (числа от 1 до 10 и т. п.).

Освоение числа 10 предшествовало исторически возникновению понятия «десяток» — основания десятичной системы счисления. Понятие «десяток» отнюдь не тождественно понятию «десять». Десять — это одно изолированное число, десяток же предполагает наличие чисел от 1 до 10, объединенных в множество элементов, обозначенное словом «десяток», а также наличие и других десятков.

*Технология обучения.* Согласно учебным планам пединститутов и педучилищ, в них изучается специальный предмет, называемый методикой преподавания математики. Однако в современной педагогике все более склоняются к мысли, что исследования, проводимые на уровне привычного понятия «методика», не могут обеспечить... высокого качества урока, упражнения, учебника.

Советы учителю по проведению урока, по решению задач важно довести до конкретной технологии, т. е. до предельно точных рекомендаций: как выгодно записывать цифры, как располагать числа, как преобразовывать задания и т. п.

Приведем примеры технологических находок, которым место в учебниках и пособиях, предназначенных для учителей:

1. Параллельная запись условия взаимосвязанных задач в двух колонках друг против друга. (Это мы видели в предыдущем изложении).

2. Сложение и вычитание двузначных чисел выгодно записывать только столбиком уже во II классе:

$$+\begin{array}{r}27\\56\\\hline 83\end{array}\qquad -\begin{array}{r}83\\56\\\hline 27\end{array}$$

3. Деформированные равенства с пропущенными числами должны составить не менее половины решаемых примеров:

$$\square+2=7,\ \square+\square=5,\ 5-\square=3.$$

4. Противопоставление в записях единиц длины и единиц площади:

$$1\ \begin{matrix}\text{см}\\\text{дм}\\\text{м}\end{matrix}=10\ \begin{matrix}\text{мм},\\\text{см},\\\text{дм}.\end{matrix}\quad\Big|\quad 1\ \begin{matrix}\text{см}^2\\\text{дм}^2\\\text{м}^2\end{matrix}=100\ \begin{matrix}\text{мм}^2,\\\text{см}^2,\\\text{дм}^2.\end{matrix}$$

5. Четверка примеров, располагаемых определенным образом в тетради, — главное средство совместного усвоения таблицы сложения и таблицы умножения:

3, 2, 5

$$\begin{matrix}\square+\square=\\ 2+\square=\end{matrix}\ 5; \qquad 5\ \begin{matrix}-2=3,\\ -\square=2.\end{matrix}$$ И т. д.

Пренебрежение эффективной технологией приводит нередко к казусам при распределении программного материала. Действующая сейчас программа предусматривает для II класса следующую тему: «Умножение на 2 и 3; деление с частными 2 и 3». Эта установка означает следующее: пример $9 \cdot 3 = 27$ будет решаться во II классе, а пример $3 \cdot 9 = 27$ (деление на 9!) будет решаться через год. Именно так и случилось из-за недооценки обобщения, из-за того, что переместительный закон не был введен своевременно, на своем месте. Однако ни один учитель никогда не предлагал отказаться от применения переместительного закона умножения, который успешно вводится немедленно при ознакомлении с умножением, будучи целью и средством усвоения таблицы умножения.

Согласно этой же установке программы, пример $9 \cdot 3 = 27$ должен решаться во II классе, тогда как пример $4 \cdot 4 = 16$ пусть подождет... до III класса (??).

Подобное искусственное растягивание материала вопреки логике обучения и опыту учителей возникает из-за недооценки такой технологической «детали», как четверка примеров, записываемая таблицей $2 \times 2$ в качестве особой целостной единицы усвоения:

$$\begin{matrix}9 \cdot 3 = 27, & 27:3 = 9,\\ 3 \cdot 9 = 27, & 27:9 = 3.\end{matrix}$$

*Преодоление метафизичности в расположении материала.* Не только для начальных, но и для старших классов характерна ныне оторванность друг от друга родственных знаний в учебниках по математике. Вот тому несколько примеров.

Умножение чисел изучается во II классе, понятие прямоугольника вводится в III классе, а его площадь — лишь в IV классе (!?). Чего проще и логичнее (это испытано нами еще 20 лет тому назад!) уже во II классе все это изучать совместно: строится прямоугольник длиной 5 см, шириной 3 см; его площадь $3 \cdot 5 = 15$ см$^2$.

Никто не возражает против совета учителям развивать у детей пространственное мышление. Уже дошкольник ориентируется в трехмерном пространстве, схватывая игрушку. Но вот обучая детей в начальной школе четыре (!!) года, мы не решаемся ввести понятие объема (объема коробки, ящика), хотя устно перемножить три небольших числа не составляет труда уже третьекласснику: $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ (см$^3$). Не здесь ли начинается традиционная недооценка фузионизма, которая привела к тому, что вплоть до IX класса школьная математика пробавляется планиметрией, искусственной двумерной «геометрией без толщины».

Примеры $8+2=10$, $6\cdot3=18$ определены программой для II класса, и эти же примеры, но в форме уравнений — $x+2=10$, $x\cdot3=18$ — отнесены к ... III классу (?!). Между тем форма уравнения лишь тогда поучительна для детей, когда она немедленно связывается с содержанием таблицы сложения (или, соответственно, умножения). Соображения о диалектике формы и содержания в подобных случаях помогут получить правильный методический вывод.

Аналогично этому уравнениям вида $x+312=654$, $364:x=2$ и т. п. место не в IV классе, как предусмотрено программами, а в III классе, поскольку действия над трехзначными числами изучаются именно в III классе. Уместно также отметить, что напрасно в программах не сказано ни слова о деформированных равенствах, или выражениях с клетками («окошечками»), которые должны предварять форму уравнения (от $\square+2=10$ к $x+2=10$ и т. п.). А ведь Министерство просвещения РСФСР в специальном решении от 20.VII 1984 г. рекомендовало учителям эту форму упражнений.

Удивительно и то, что методист МП РСФСР О. Г. Абрамова, десятилетия печатая рекомендуемые ею тексты контрольных работ в журнале «Начальная школа», ни разу не предложила ни одного деформированного примера или хотя бы задания на самостоятельное составление школьником обратной задачи к уже решенной.

Нередко получается так: ценные приемы обучения найдены, описаны и доказаны. Но на пути освоения их учительством неожиданно возникают инструкции, в которых эти находки не признаются.

Методическая система укрупнения дидактических единиц сможет стать достоянием учительства в полной мере лишь тогда, когда она будет отражена в учебнике, объединяющем учителя и школьника.

В педагогике нет сейчас задачи важнее, чем создание высокоэффективных учебников!

В исследованиях последнего времени все настойчивее звучит тезис о необходимости подкрепления методических поисков разработкой соответствующей *технологии обучения*.

Корни слов «технология» и «техника» общие. Передовая технология патентуется, она обеспечивает успех в экономическом соревновании...

В Советском энциклопедическом словаре дается следующее разъяснение этого термина: «Задача технологии как науки — выявление физических, химических, механических и других закономерностей с целью определения и использования на практике наиболее эффективных и экономичных производственных процессов» (Советский энциклопедический словарь, 1981, с. 133).

Понятие «технология», имеющее отношение прежде всего к про-

изводству вещей, может быть использовано при обсуждении проблем «производства и потребления» знаний.

Понятия «методология обучения» и «технология обучения», будучи взаимодополнительными, находятся в таких же содержательных связах друг с другом, как понятия «частица» и «волна» в физике.

Если методология педагогики зиждется прежде всего на наиболее общих принципах марксистско-ленинской философии, то технология обучения приземлена, она от практики, *она более предметна, чем методика обучения.* Без опытного исследования, без экспериментального испытания в классах передовую технологию обучения (скажем, эффективные учебники) создать невозможно!

Технология обучения напрямую связана с предельно конкретными деталями процесса обучения: порядок расположения записей, правил, компонентов тем и параграфов; подбор задач, рисунков, чисел, таблиц; выбор символов и терминов; создание удачных обозначений, графиков, упражнений, моделей и приборов; использование несловесной информации (толщина линий, цвет, формы знаков); конкретные приемы контроля знаний и т. п.— все это в совокупности обеспечивает эффективность технологии того или иного нового научного направления в дидактике.

Верное технологическое решение означает нахождение оптимальной последовательности фаз обучения во времени и пространстве урока и учебника.

Короче говоря, под технологией обучения мы здесь понимаем материализацию дидактической идеи в предельно конкретных рекомендациях, *доступных для исполнения рядовым учителем.*

Среди педагогов живуче представление, что будто путь учителя к освоению новой (более эффективной) методической системы лежит через теорию к практике: сначала, скажем, надо убедить учителя теоретически в выгодах укрупнения, потом уж он сам возьмется за укрупнение знаний на своих уроках.

Такой путь внедрения передового опыта имеет, конечно, место в жизни, но он встречается редко, обычно среди тех, кто специально интересуется литературой по современным направлениям науки об обучении.

Увы, таких учителей немного и общий путь распространения новых приемов обучения противоположный — «от практики к теории», от наблюдений передовой технологии на уроке новатора к подражанию на своих уроках, а затем уж к теоретическому «осмыслению совершенного» по литературе.

*Системный подход к проблемам дидактики* позволяет, на наш взгляд, найти пути преодоления таких извечных недостатков обучения, как формализм и раздробленность знаний учащихся.

Системный подход освещает новым светом многие общие и специальные проблемы дидактики. Однако в силу инерции мысли,

особенно в педагогике, в практике обучения в средней и высшей школе до сих пор преобладает *элементаристский*, а не целостный, интегративный, подход.

В эпоху научно-технической революции наиболее остро встала проблема освоения быстро возрастающего объема необходимого минимума знаний за меньшее, чем прежде, время. Педагоги и психологи справедливо ищут разрешение этого противоречия в создании новых методических систем обучения, реализующих нетронутые резервы человеческой психики: считается, что человек за всю свою жизнь не использует и десятой доли информационной мощи своего мозга.

Подобно тому как цепная реакция не возникает, пока не достигнута определенная концентрация вещества, так и разреженность информационного потока затрудняет консолидацию знаний, являющуюся целью учебного процесса. Если, скажем, сегодня учат табличное умножение ($5 \times 7 = 35$), то с тем же примером, но с нулями ($50 \times 7 = 350$) дети встречаются лишь через полгода.

Некоторые успешные дидактические поиски последних лет (Лозанов — в Болгарии, Л. В. Занков и В. Ф. Шаталов — в СССР) при всем различии их подходов имеют то общее, что в них идет речь об ускорении потока учебной информации, о более быстром обучении. Выяснилось, что даже простое сжатие во времени учебного материала (при сохранении неизменной последовательности тем и разделов и характера учебных заданий) пробуждает запасные резервы психики.

В разрабатываемом нами методе укрупнения дидактических единиц мы идем дальше: ускоренное обучение здесь достигается за счет качественного преобразования главной «клеточки» обучения — упражнения.

Отдельную «клеточку» учебного процесса, т. е. его локальную и относительно самостоятельную ступень, мы определяем как дидактическую единицу, состоящую из логически различных элементов, которые образуют в то же время взаимосвязанное целое. Благодаря этому укрупненная единица обладает устойчивостью и способна к быстрому воспроизведению в сознании. В теоретическом отношении мы можем говорить о возникновении нового качества знаний — их системности.

Основной прием этой дидактической линии — *самостоятельное создание учащимися семейства взаимосвязанных задач*. Многолетнее испытание в школах этого метода показало его практичность: программный материал удается изучать с экономией 15—20% учебного времени. Кроме того, достижению системности содействуют специальные приемы символической или образной (визуальной) фиксации учебного материала, обеспечивающие одновременное усвоение взаимосвязанных знаний.

В серии наших экспериментальных пособий успешно осуществлено совместное изучение взаимно-обратных действий (сложения

и вычитания, умножения и деления), взаимно-обратных теорем, взаимно-обратных функций, обыкновенных и десятичных дробей, геометрии плоскости и пространства и т. п., т. е. постижение аналогичных или контрастных понятий в их единстве и взаимопереходах между ними.

Необходимость системного, укрупненного, целостного изложения учебного материала объясняется в конечном счете закономерностями информационных процессов мозга, а именно: цикличностью потоков информации в мозгу человека; параметрами оперативной памяти, в пределах которой (30—40 мин у человека) должны фиксироваться основные компоненты знания.

Физиологи установили экспериментально, что основными единицами человеческой речи являются не отдельные звуки, а целые слоги (т. е. более крупные носители информации), причем одни и те же сети нейронов могут принимать участие в эмоциях диаметрально противоположного характера при изменениях электрического знака.

Л. Берталанфи системой называл «комплекс взаимодействующих компонентов». Однако это определение в силу чрезвычайной его абстрактности кажется нам недостаточным. Представляется более содержательным определение, данное П. К. Анохиным: «Системой можно назвать только такой комплекс избирательно вовлеченных компонентов, у которых взаимодействие и взаимоотношение приобретает характер взаимодействия компонентов на получение фокусированного полезного результата» (Принципиальные вопросы общей теории функциональных систем// Принципы функциональной организации функций. М., 1973, с. 28).

Такой подход позволяет оценить и сопоставить разные схемы организации учебного материала.

Рассмотрим подробнее один пример. Линейное уравнение $kx+p=0$ (I) связано как с единицей более высокого уровня — квадратным уравнением $ax^2+bx+c=0$ (II), так и с единицами того же уровня: линейной функцией $y=kx+p$ (III), линейными неравенствами с одной переменной $kx+p \gtreqless 0$ (IV), линейными неравенствами с двумя переменными $y \gtreqless kx+p$ (V). Перед автором учебника возникает вопрос, изучать ли (II) после линейного уравнения (I), затем последовательно (III) и (IV) или объединить компоненты (I), (III), (IV), (V) в единой укрупненной теме «Линейные функции, уравнения и неравенства».

Традиционное обсуждение таких вопросов в пределах «чистой логики или математики» или «самой в себе дидактики» даже не обнаруживает здесь проблемы. А между тем все три задания могут быть представлены в совместной записи $y=2x-4 \gtreqless 0$ и наглядно реализуемые на одном и том же рисунке, несомненно, выступают здесь в качестве не столько взаимодействующих, сколько — по Анохину — *взаимосодействующих* компонентов еди-

ной системы знаний.

Если запись $2x-4 \gtreqless 0$ интерпретируется двумя лучами координатной прямой, то запись — трихотомия $y \gtreqless 2x-4$ интерпретируется двумя полуплоскостями $y>2x-4$ и $y<2x-4$ с границей раздела по прямой $y=2x-4$. (Методически выгодно эти схемы предложить вместе одну под другой для визуального анализа и сравнения.)

В нашем опыте экспериментального обучения подобные совокупности заданий образовывали укрупненную единицу «высшего уровня». По действующим же программам линейные уравнения и неравенства с одной переменной ($2x-4 \gtreqless 0$) полагается изучать в VI—VII классах, а линейные уравнения и неравенства с двумя переменными ($y \gtreqless 2x-4$) в основном изучаются в X классе.

Примечательно, что постепенно обретают популярность пособия, в которых осуществляется одновременное усвоение многих компонентов единой системы знания.

Так, в книге Д. В. Беклемишева «Курс линейной алгебры и аналитической геометрии» (М., 1971) аналогичные образы плоскости и пространства рассматриваются совместно.

Открытие неевклидовой геометрии историки математики объясняют тем, что Лобачевский работал над учебником, в котором планиметрия и стереометрия излагались совместно. Известные знания, будучи включены в новую, более широкую, систему, помогли ученому выйти из привычной колеи представлений.

Системный подход к дидактическим проблемам немедленно ставит *проблему времени* в педагогике: элементы одной и той же системы знаний должны, как правило, войти в сознание одновременно или на возможно меньшем временно́м интервале. Именно при этом условии часть постигается через целое, анализ совершается через синтез.

В данной связи чрезвычайно интересен следующий пример.

Поступающие на математическое отделение в один из крупных педагогических институтов допускали в своей массе грубые ошибки при решении простейшего неравенства $\sin x>0{,}5$, хотя они тут же успешно решали соответствующее уравнение $\sin x=0{,}5$. В чем же дело?

Оказывается, что одноименные уравнения и неравенства, изученные, согласно учебникам, порознь, так и не обретают качества элементов единой системы знаний. Знания, усвоенные раздельно во времени, так и остаются на уровне сосуществующих знаний, т. е. внесистемным набором сведений, вследствие чего память учащихся переполняется осколками разрозненных знаний.

Устойчивы же во времени, способны к саморазвитию только системные, укрупненные знания, в богатстве связей и обусловливаний одного другим.

Принцип укрупнения дидактических единиц усвоения мы видим в следующем: в ткани развивающегося знания предыдущее и последующее звенья должны иметь больше общих носителей

информации, начиная с кодов возможно более низкого уровня. Поясним сказанное. Два утверждения обретают внутреннее единство и образуют целостную систему, коль скоро они:

а) составлены из одних и тех же букв, знаков, цифр, например:

$$2+3=5 \quad \text{и} \quad 5-3=2,$$
$$(x^2+c)'=2x \quad \text{и} \quad \int 2x dx = x^2+c;$$

б) содержат возможно больше общих слов (понятий), например:

«Из всех прямоугольников равн$\frac{\text{ого периметра}}{\text{ой площади}}$ квадрат обладает наи$\frac{\text{большей площадью}}{\text{меньшим периметром}}$».

Этим, видно, и объясняется эффективность наших экспериментальных учебников, в которых сознательно осуществлена пространственная и временна́я близость воспринимаемых компонентов целостного знания. Отметим один важный пункт: в совокупности наших экспериментальных учебников удалось включить обязательные для усвоения законы, правила, задачи и т. п. в неизвестные ранее целостности знаний. Стало быть, описываемый метод открывает путь к совершенно новым системам знаний, хотя элементы этих знаний были известны и в классической дидактике.

Достижение системности знаний неизбежно связано с проявлением «двойственности знания», которую не следует отождествлять с дуализмом. Вот что пишет К. Маркс по поводу I тома «Капитала»: «Самое лучшее в моей книге: 1) подчеркнутый уже в *первой* главе *двойственный характер труда,* смотря по тому, выражается ли он в потребительной или в меновой стоимости (на этом основывается *все* понимание фактов)...» (*Маркс К., Энгельс Ф.* Соч. Т. 31. С. 277).

Простейшая система — это парная, состоящая из двух компонентов, различающихся в каком-либо отношении, но сходных по другим параметрам. (Упомянем, что человек воспринимает глубину пространства и стереоскопичность изображений благодаря сравнительной переработке потоков зрительной информации, поступающей через оба глаза.)

Выявление двойственности в науке означало часто крупное свершение: таково, например, обнаружение физического и морального старения техники (в политэкономии); корпускулярно-волнового дуализма (в физике). Даже создание двойной итальянской бухгалтерии (дебет — кредит) резко облегчило учет и ускорило движение товаров.

Понятие «двойственность» представляет в общепознавательном плане категорию большой ценности. Системный подход к исследованию объектов может осуществляться «только путем построения взаимно-дополнительных теорий, концепций, разработок» (*Садовский В. А.* Основания общей теории систем. М.

1974. С. 248).

Двойственность присуща как бы всем ступеням переработки информации человеком, всем этапам обобщения. Любопытные проявления принципа двойственности обнаружены в психологии восприятия и мышления.

В философской литературе понятие единого (единственного) обычно противопоставляется понятию множественного. В определенном смысле верно, однако, и то, что множественному в познании предшествует двойственное: каждой части противостоит все то, что остается от целого вне пределов этой части.

Итак, простейшая форма анализа — это не разбиение целого на «много» частей, а разделение на «две» части, раздвоение единого. В теоретическом аппарате собственно философии такие понятия, как «противоречие», «противоположность», «противополагание», употребляются чрезвычайно часто. Но эти понятия фразеологически (один против другого!) предполагают наличие именно двух полюсов, двух характеристик явлений, внутренне взаимосвязанных.

Этап дифференцирования трех понятий — единственного, двойственного и множественного — был скачком в логическом освоении мира человеком. Два объекта, порознь воспринимаемые, должны были объединиться в сознании в целостное единое множество, дабы обрести качество «двуединства». Числительное «два» имело качественное происхождение — это была какая-то конкретная естественная пара: рук, ног, глаз, крыльев, верхнего и нижнего ряда зубов и т. п. Множество, состоящее из двух элементов, стало в дальнейшем базой нового расширения числовых представлений: число «2» стало следующей после «1» сложной единицей счета (счет парами).

Особая роль двоичной системы исчисления неожиданно проявилась в новом качестве в последние десятилетия: математическая логика, вычислительные машины основаны как раз на двоичной системе, на логической операции дихотомии.

Академик А. Н. Колмогоров в статье «Кибернетика» (БСЭ, т. 51) указывает, что применение дихотомии существенно облегчает переработку информации. В некоторых исследованиях по теории систем справедливо усматривают развитие системного качества по линии усложнения, обогащения связей между компонентами: двойственность — полярность — противоречие.

А в дидактике особенно важно соблюдение преемственности, постепенности в движении от простого к сложному в процессе все более точной категориальной характеристики изучаемого. Понятно, что первым, наиболее доступным в обучении шагом на пути к познанию диалектического противоречия выступает именно противопоставление одного другому.

Вершиной развития органической природы является возникновение мозга, мыслящей материи, человека разумного. Поляри-

зованность человеческих мыслей несомненно связана с недавним обнаружением электрических диполей в коре мозга.

Знаменитый метод И. П. Павлова «перемежающегося противопоставления» раздражителей есть двойственное задание животному:

а) сильный свет→кормление→ слюна;

б) слабый свет→нет кормления→нет слюны.

Как пишет И. П. Павлов, при такой системе уже после нескольких повторений этого двойственного задания у животного возникало четкое дифференцирование раздражителей по одному качеству.

Таким образом, уже элементарное явление рефлекторной деятельности, составляющее простейший вид психических явлений вообще, в сущности, представляет единство двух явлений, каждое из которых в свою очередь дихотомично:

сильный свет→слабый свет

⇓ ⇓

слюна нет слюны

Эта исходная двойственность реакций, несомненно, проявляется во всей последующей иерархии многообразных психических явлений.

Возвращаясь к проблемам преподавания математики, уместно отметить фундаментальное значение логического принципа двойственности для различных отраслей этой науки, в частности: топологии, проективной геометрии, математической логики, линейного программирования и др.

В математике понятие «двойственность» тесно связано с родственными понятиями, как-то: «сопряженность» (например, комплексных чисел, матриц, теорем, фигур, преобразований); «взаимность» (взаимно простые числа, многочлены); «симметричность» (групп, матриц, функций, графиков) и т. п.

Есть основания полагать, что принцип двойственности, проявляющийся наиболее отчетливо в «высших» разделах математики, должен учитываться при конструировании адекватных методических систем обучения самой науке — математике.

Системные знания могут быть построены эффективно лишь на основе обеспечения теснейшего взаимопроникновения и взаимосодействия таких двойственных начал знания, как логическое и психологическое, доказательное и гипотетическое, наглядное и образное, эмпирическое и теоретическое, абстрактное и конкретное в знаниях, расширение и углубление знаний, количественные и качественные задачи, линейная и концентрическая структура в расположении материала. Важно при этом не скатиться к зрящному отрицанию или умалению одного из элементов приведенных пар в ущерб другому: при построении системы знаний необходимо выявить и использовать связи между ними, познание одного через другое.

Упражнение, главная «клеточка» учебного процесса, обретает системное качество тогда, когда содержит в своем составе по меньшей мере четыре компонента: исходная задача; обратная задача; составление и решение задачи, аналогичной исходной; обобщенная задача (при этом важно то, чтобы с последними видами заданий ученик справлялся самостоятельно).

Особую роль в процессе усвоения обретает переход «решение задачи→составление задачи». В общепринятой ныне дидактике обучение математике отождествляется с решением готовых задач, сконструированных кем угодно (учителем, автором книги), но не учеником (отсюда — бессистемность знаний).

Наследственная информация организмов кодируется в двойной спирали вещества. Подобно этому сочетание решения и составления задач и создает условия для обретения знанием системного качества.

Гегель различал уровни связей между элементами, называя их соответственно механизмом, химизмом и организмом. В системе знаний, образующих даже обязательный программный минимум, встречаются все эти уровни связей. Обнаружению и усвоению этих связей служит последовательное установление двойственности, полярности и диалектической противоречивости, выступающих как компоненты единой системы.

Укрупненная дидактическая единица знания, будучи «единством разнообразного многого» (Гегель), представляет системную единицу знания; в этих целях следует строить объяснение теории крупными блоками, что предполагает опору на симультанное, интегративное мышление.

Системность знания достигается через применение, в свою очередь, системы разнообразных методов обучения. Системные представления, будучи новыми для теоретического аппарата педагогики, помогают разрешению ряда важных ее проблем. Анализ знаний как специфического целостного объекта несомненно будет содействовать и развитию не только педагогических и методических систем, но и самой общей теории систем.

## Оглавление


От авторов 3

Глава I. ТЕОРИЯ УКРУПНЕНИЯ ЗНАНИЙ КАК ОБЪЕКТИВНАЯ ТЕНДЕНЦИЯ СОВРЕМЕННОЙ ДИДАКТИКИ 5

§ 1. Что такое укрупнение дидактической единицы (УДЕ)? —

§ 2. Взаимосвязь теории и техники обучения в укрупнении дидактической единицы 19

§ 3. О целостности и диалектичности математических знаний 30

§ 4. О принципе историзма в обучении математике 45

§ 5. О взаимосвязи сознания и подсознания в актуализации укрупненных знаний 55

§ 6. Вклад УДЕ в саморазвитие мышления учащихся 73

§ 7. Обратимость операций как основа сознательности усвоения знаний 83

§ 8. Матричное и граф-схемное представление математической информации 101

§ 9. Диалог об укрупнении дидактической единицы 115

§ 10. Выводы 125

Глава II. МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЕ НА ОСНОВЕ УКРУПНЕНИЯ ДИДАКТИЧЕСКИХ ЕДИНИЦ 129

§ 11. Об объеме знаний учащихся по математике за первые два года обучения —

§ 12. Сравнение (противопоставление) понятий на уроках математики 131

§ 13. Изучение числового ряда 134

§ 14. Совместное изучение сложения чисел и разложения числа на слагаемые 138

§ 15. Переместительный закон сложения. Совместное изучение сложения и вычитания 142

§ 16. Решение примеров, в которых надо определить знак действия и неизвестный компонент 147

§ 17. Действия с нулем 149

§ 18. Изучение темы «Второй десяток» 151

§ 19. Сложение и вычитание в пределах 20 без перехода через десяток 154

§ 20. Сложение и вычитание в пределах 20 с переходом через десяток 159

§ 21. Работа с таблицей Пифагора 165

§ 22. Об изучении порядковых чисел в начальной школе 168

§ 23. Классификация простых задач (в одно действие) на сложение и вычитание 169

§ 24. Задачи на нахождение разности, уменьшаемого и вычитаемого. Одновременное изучение задач на нахождение разности и уменьшаемого 173

§ 25. Противопоставление задач на нахождение суммы и разности 175

§ 26. О системе простых задач, рассматриваемых при изучении табличного умножения и деления 176

§ 27. Изучение задач на уменьшение и увеличение числа в несколько раз и на кратное сравнение величин 181

§ 28. Противопоставление задач на разностное и кратное сравнение 185

§ 29. Изучение задач на нахождение части числа, числа по величине его части; решение задач типа: «Какую часть составляет одно число от другого?» 186

ВМЕСТО ЗАКЛЮЧЕНИЯ. О ПУТЯХ СОВЕРШЕНСТВОВАНИЯ ПРОГРАММ И УЧЕБНИКОВ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЫ 190

Монография

**Пюрвя Мучкаевич Эрдниев**
**Батыр Пюрвяевич Эрдниев**

**Теория и методика обучения математике в начальной школе**

Зав. редакцией Э. П. АБЕЛЬЦЕВА
Редактор В. Г. ИОФФЕ
Художник Л. Д. ШЕСТАКОВСКАЯ
Художественный редактор Е. В. ГАВРИЛИН
Технические редакторы О. В. НЕДОСЕКИНА, Е. А. РЕВИЧ
Корректор Л. В. ЯКОВЛЕВА

ИБ № 1249

Сдано в набор 02.09.87. Подписано в печать 03.03.88. Формат 60×88 1/16. Бумага офсетная № 2. Печать офсетная. Гарнитура литературная. Усл. печ. л. 12,74. Уч.-изд. л. 14,75. Усл. кр.-отт. 12,74. Тираж 35 000 экз. Зак. № 650. Цена 1 р. 20 к.

Издательство «Педагогика» Академии педагогических наук СССР и Государственного комитета СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
107847. Москва, Лефортовский пер., 8

Московская типография № 4 Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 129041. Москва Б. Переяславская, 46.

1р. 20к.

ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЕ